Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein conjugiertes System bilden.

Inaugural-Dissertation
der
Hohen philosophischen Fakultät
der
kgl. bayer. Julius-Maximilians-Universität Würzburg
zur Erlangung der Doktorwürde
vorgelegt von

A. Tachauer
aus
Würzburg.

ACAD. LEOP. NAT. BIBL.

1903

Meinen lieben Eltern

in Verehrung

gewidmet.

Die nachfolgende Arbeit habe ich auf Veranlassung meines hochverehrten Lehrers Herrn Prof. Dr. *A. Voss* während meiner Studienzeit in Angriff genommen und in der Zeit meiner Lehrthätigkeit in Gunzenhausen vollendet.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, Herrn Prof. Dr. *A. Voss* für die mir bei der Bearbeitung in so bereitwilliger und liebenswürdiger Weise erteilten Ratschläge, insbesondere bei der Auswahl der einschlägigen Litteratur, meinen besten Dank auszusprechen.

Einleitung.

Das Problem, diejenigen Flächen zu finden, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein conjugiertes System bilden, wurde von *Voss*[1]) und von *Guichard*[2]), welche unabhängig von einander dieses Problem behandelten, auf verschiedene Weise gelöst. Während jedoch jener eine direkte Methode der Auffindung solcher Flächen aufstellte, gelangte dieser, von der Frage ausgehend: „Gibt es Strahlensysteme, deren abwickelbare Flächen mit den Brennflächen die Krümmungslinien gemein haben?“ indirekt zu obigen Flächen als Evolutenflächen dieser Brennflächen.

In folgender Abhandlung wollen wir uns der Bezeichnungsweise von *Bianchi*[3]) bedienen und demgemäss folgende Abkürzungen einführen:

1. Die Voss'schen Flächen, d. h. diejenigen Flächen, welche ein conjugiertes System geodätischer Linien besitzen, heissen V-Flächen,

---

[1]) A. Voss: Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein conjugiertes System bilden (Sitzungsberichte d. math. phys. Klasse d. kgl. bayr. Akad. d. Wissenschaften zu München 1888, 18. Bd., pag. 96).

[2]) C. Guichard: α) Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables (Annales scientifiques de l'école normale supérieure 1889 t. VI, pag. 333).

β) Recherches sur les surfaces à courbure totale constante (Ann. scient. t. VII, 1890 pag. 233.

[3]) Bianchi: Differentialgeometrie, übers. v. Lukat (Teubner 1896—98).

2. die Guichard'schen Strahlensysteme, d. h. solche, deren abwickelbare Flächen mit den Brennflächen die Krümmungslinien gemein haben, G-Strahlensysteme und diese Brennflächen G-Flächen;

3. die pseudosphärischen Flächen, d. h. Flächen mit constantem negativen Krümmungsmass S-Flächen.

Im I. Teil, welcher die Theorie der V-Flächen betrifft, werden nach einer Zusammenstellung einiger Formeln der Flächentheorie die Voss'sche und die Guichard'sche Methode der Auffindung von V-Flächen abgeleitet und deren Zusammenhang mit den G-Flächen und G-Strahlensystemen dargelegt. Dabei zeigt sich, dass eine ganze Klasse von V-Flächen und demgemäss auch eine ganze Klasse von G-Strahlensystemen einer S-Fläche durch Parallelismus der Normalen in entsprechenden Punkten associiert ist und unter Voraussetzung der Kenntnis dieser S-Fläche nach Integration einer Laplace'schen Differentialgleichung ermittelt werden kann. Ferner wird dort nach der Reproduktion der bereits von *Guichard*[1]) durchgeführten ∞^1 fachen Transformation von V-Flächen und G-Systemen auch eine Transformation für nach der Voss'schen Methode aufgefundene V-Flächen angegeben, was zu einem bereits von *Stäckel*[2]) gefundenen Resultat führt.[3])

Der II. Teil behandelt das von *Voss* nur ganz kurz angedeutete Beispiel der V-Rotationsflächen. Wir gelangen hiebei zu drei verschiedenen Flächenfamilien, deren associierte S-Flächen im allgemeinsten Falle

---

[1]) C. Guichard: Sur une classe particulière d' équations aux dérivées partielles (Ann. scient. t. VII, 1890 pag. 19).

[2]) G. Stäckel: Biegungen und conjugierte Systeme (Math. Ann. Bd. 49, pag. 255).

[3]) Die obigen Resultate sind eingehend behandelt worden von Darboux in seinen Leçons sur la théorie générale des surfaces und von E. Cosserat in seiner Abhandlung: Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces (Faculté des sciences de Toulouse t. VI, pag. 40 u ff.)

Schraubenflächen, bei specieller Wahl der durch die Integration eingeführten Constanten aber die drei Typen der bereits bekannten S-Rotationsflächen sind. Sodann betrachten wir noch die Gestalt der V- und S-Rotationsflächen, sowie den Verlauf der geodätischen conjugierten Systeme, bezw. der Haupttangentencurven auf denselben, um schliesslich die Biegungen der speciellen V-Flächen zu behandeln.

(Die zur Veranschaulichung dienenden Figuren befinden sich in einer der Arbeit beigefügten Figurentafel.)

I. Teil.

Theorie der V-Flächen und ihrer charakteristischen Eigenschaften.

§ 1.

Zusammenstellung einiger Formeln.

Beziehen wir eine gegebene Fläche auf die von *Gauss* eingeführten Oberflächencoordinaten u und v, so dass jeder Punkt der Fläche die rechtwinkligen Coordinaten besitzt:

$$x = x(u, v); \; y = y(u, v); \; z = z(u, v),$$

so hat das Quadrat des Längenelements die Form:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F du\,dv + G\,dv^2;$$

hiebei haben die Fundamentalgrössen 1. Ordnung E, F, G die Werte:

$$E = \Sigma x_u{}^2; \; F = \Sigma x_u x_v; \; G = \Sigma x_v{}^2.$$ [1]

Diejenige Curve, längs welcher u constant ist, heisse Curve u und diejenige, längs welcher v constant ist, Curve v, so dass die Curve u das Längenelement

$$ds_u = \sqrt{G}dv$$

---

[1] $x_u = \frac{dx}{du}, \; x_v = \frac{dx}{dv}, \; y_u = \frac{dy}{du}$ etc.

$\Sigma x_u{}^2 = x_u{}^2 + y_u{}^2 + z_u{}^2, \; \Sigma x_u x_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$ etc.

und die Curve v das Längenelement

$$ds_v = \sqrt{E}du$$

besitzt. Die Parametercurven u und v haben die Richtungscosinus:

$$1. \left\{ \begin{array}{l} \cos ux = \frac{x_v}{\sqrt{G}}; \ \cos uy = \frac{y_v}{\sqrt{G}}; \ \cos uz = \frac{z_v}{\sqrt{G}}; \\ \cos vx = \frac{x_u}{\sqrt{E}}; \ \cos vy = \frac{y_u}{\sqrt{E}}; \ \cos vz = \frac{z_u}{\sqrt{E}}. \end{array} \right.$$

Für den zwischen o und π gelegenen Winkel ω der Parametercurven gilt also:

$$2. \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}; \ \sin \omega = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{EG}}, \\ \text{wo } \sigma = EG - F^2 \text{ ist.} \end{array} \right.$$

Von der häufig getroffenen Festsetzung, dass $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ stets positiv sind, wollen wir aus einem im folgenden Paragraphen zu erörternden Grunde Abstand nehmen.

Die Flächennormale besitzt die Richtungscosinus:

$$X = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}; \ Y = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}; \ Z = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

folgen hieraus die Formeln:

$$3. \left\{ \begin{array}{l} \Sigma XX_u = \Sigma XX_v = \Sigma Xx_u = \Sigma Xx_v = 0; \\ \Sigma X_u x_u = -\Sigma Xx_{uu}; \ \Sigma X_v x_v = -\Sigma Xx_{vv}; \\ \Sigma X_u x_v = \Sigma X_v x_u = -\Sigma Xx_{uv}. \end{array} \right.$$

Definieren wir die Fundamentalgrössen 2. Ordnung D, D', D'' durch:

$$D = \Sigma Xx_{uu}; \ D' = \Sigma Xx_{uv}; \ D'' = \Sigma Xx_{vv},$$

so gelten die Gleichungen:

$$4.\quad \begin{cases} X_u = \dfrac{FD' - GD}{\sigma} x_u + \dfrac{FD - ED'}{\sigma} x_v \\ X_v = \dfrac{FD'' - GD'}{\sigma} x_u + \dfrac{FD' - ED''}{\sigma} x_v. \end{cases}$$

Die Fundamentalgrössen 1. und 2. Ordnung sind nicht unabhängig von einander, vielmehr müssen folgende drei Existenzbedingungen der Fläche erfüllt sein:

$$5.\quad \begin{cases} D_v - D'_u - \left\{ {12 \atop 1} \right\} D + \left[\left\{ {11 \atop 1} \right\} - \left\{ {12 \atop 2} \right\} \right] D' + \left\{ {11 \atop 2} \right\} D'' = 0 \\ D''_u - D'_v - \left\{ {12 \atop 2} \right\} D'' + \left[\left\{ {22 \atop 2} \right\} - \left\{ {12 \atop 1} \right\} \right] D' + \left\{ {22 \atop 1} \right\} D = 0 \\ DD'' - D'^2 = K \cdot \sigma. \end{cases}$$

Hiebei ist das Krümmungsmass K der Fläche lediglich eine Funktion der Grössen E, F, G und ihrer 1. und 2. Differentialquotienten nach u und v und zu berechnen aus der Formel:

$$6.\quad K \cdot E = \frac{d}{dv} \left\{ {11 \atop 2} \right\} - \frac{d}{du} \left\{ {12 \atop 2} \right\} + \sum_1^2 {}_i \left\{ {11 \atop i} \right\} \left\{ {i2 \atop 2} \right\} - \left\{ {12 \atop i} \right\} \left\{ {i1 \atop 1} \right\};$$

ferner sind die *Christoffel*'schen Symbole durch folgende Werte definiert:

$$7.\quad \begin{cases} \left\{ {11 \atop 1} \right\} = \dfrac{GE_u + FE_v - 2FF_u}{2\sigma}; \quad \left\{ {11 \atop 2} \right\} = \dfrac{-FE_u - EE_v + 2EF_u}{2\sigma} \\ \left\{ {12 \atop 1} \right\} = \dfrac{GE_v - FG_u}{2\sigma}; \quad \left\{ {12 \atop 2} \right\} = \dfrac{EG_u - FE_v}{2\sigma} \\ \left\{ {22 \atop 1} \right\} = \dfrac{-FG_v - GG_u + 2GF_u}{2\sigma}; \quad \left\{ {22 \atop 2} \right\} = \dfrac{EG_v + FG_u - 2FF_v}{2\sigma}. \end{cases}$$

Verstehen wir ferner unter dem sphärischen Bilde eines Flächenpunktes (nach *Gauss*) den Schnittpunkt der durch den Coordinatenanfangspunkt zur Normale des Flächenpunktes gezogenen Parallele mit der Oberfläche

der um den Coordinatenanfangspunkt mit dem Radius 1 beschriebenen (Einheits-)Kugel, unter dem sphärischen Bilde einer Curve diejenige Curve auf der Kugel, welche der Flächencurve entspricht, so hat das Quadrat des Längenelements auf der Kugel den Wert:

$$ds'^2 = e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

so dass die Grössen e, f, g definiert sind durch:

$$e = \Sigma X_u^2;\ f = \Sigma X_u X_v;\ g = \Sigma X_v^2.$$

Ist nun das sphärische Bild gegeben und sind ausserdem die Grössen D, D', D'' bekannt, so lässt sich die Fläche durch Quadraturen ermitteln mit Hilfe folgender für die Coordinaten x, y, z giltigen Beziehungen:

$$8. \quad \begin{cases} x_u = \dfrac{fD' - gD}{eg - f^2} X_u + \dfrac{fD - eD'}{eg - f^2} X_v \\ x_v = \dfrac{fD'' - gD'}{eg - f^2} X_u + \dfrac{fD' - eD''}{eg - f^2} X_v \end{cases}$$

(analoge Beziehungen gelten für y und z).

§ 2.

I. Lösung des Problems der V-Flächen.

Wir wollen in diesem Paragraphen die von *Voss* angegebene Methode der Auffindung von V-Flächen ableiten.

Aus bekannten Sätzen der Flächentheorie über die geometrische Bedeutung des Verschwindens von D' und der Symbole $\left\{ {11 \atop 2} \right\}$ und $\left\{ {22 \atop 1} \right\}$ folgt unmittelbar:

„Damit die Parameterlinien einer vorgegebenen Fläche ein conjugiertes System geodätischer Linien bilden, ist notwendig und hinreichend, dass die Beziehungen:

$$1. \quad D' = 0; \left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0; \left\{ {22 \atop 1} \right\} = 0$$

erfüllt sind."

Soll nun eine V-Fläche ermittelt werden, so müssen ausserdem ihre Fundamentalgrössen 1. und 2. Ordnung den Existenzbedingungen 5. des § 1 genügen, welche sich mit Hilfe der Formeln:

$$\left\{ {12 \atop 1} \right\} = \sqrt{\frac{\sigma}{G}} \frac{d}{dv}\left(\sqrt{\frac{G}{\sigma}}\right), \left\{ {12 \atop 2} \right\} = \sqrt{\frac{\sigma}{E}} \frac{d}{du}\left(\sqrt{\frac{E}{\sigma}}\right)$$

auf die folgenden reducieren:

$$2. \quad \frac{d}{dv}\left(\frac{D\sqrt{G}}{\sqrt{\sigma}}\right) = 0; \quad \frac{d}{du}\left(\frac{D''\sqrt{E}}{\sqrt{\sigma}}\right) = 0; \quad DD'' = K\sigma.$$

Es handelt sich nun darum, *„ob es möglich ist, aus den sechs Gleichungen 1. und 2. die V-Flächen zu bestimmen“*.

Zunächst liefert die Integration der beiden ersten Gleichungen von 2. für D und D″ die Werte:

$$D = -U\sqrt{E}\sin\omega, \quad D'' = \dot{-} V\sqrt{G}\sin\omega,$$

wo U und V beliebige Funktionen von u bez. v darstellen.

Wir wollen bei unseren Betrachtungen die abwickelbaren Flächen ausschliessen. Da nämlich zu der aus geodätischen Linien bestehenden Schar der Erzeugenden als Curven v jede Curvenschar u conjugiert ist, so brauchen wir nur irgend eine Schar geodätischer Linien zu ziehen, um ein conjugiertes System geodätischer Curven zu erhalten. Es gibt also auf den abwickelbaren Flächen unbestimmt viele conjugiert-geodätische Systeme. Da für diese neben D′ auch D verschwindet, so hat U den Wert Null. Schliessen wir den Fall: U = 0, sowie V = 0 aus, so erhalten wir den allgemeinsten Fall, wenn wir U = 1, V = 1 setzen, da dies nur eine andere Anordnung der Curven u, bez. v nach sich zieht. Diese Werte haben auch *Voss* und *Guichard* in ihren Abhandlungen gewählt, wozu sie, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung zu schaden, auch berechtigt waren, da sie von den Bieg-

ungen der V-Flächen absahen. Um jedoch unsere Formeln so einzurichten, dass sie auch für die Biegungen gelten, müssen wir, wie wir im § 7 zeigen werden:

$$U = k, \; V = \frac{1}{k}$$

setzen, wo k eine beliebige Constante bedeutet. Die Fundamentalgrössen 2. Ordnung haben also die Werte:

$$3. \; D = -k\sqrt{E}\sin\omega; \; D' = 0; \; D'' = -\frac{1}{k}\sqrt{G}\sin\omega.$$

Um das Krümmungsmass K explicite darzustellen, benützen wir die Gleichung 6 des § 1, welche sich leicht auf die folgende reducieren lässt:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{d}{du}\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\sqrt{\sigma}}{E}\right].$$

Da $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}$ in die Form gebracht werden kann:

$$\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\omega_v}{\sin\omega},$$

so wird:

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\omega_{uv}}{\sin\omega}.$$

Die Gleichung $DD'' = K\sigma$ geht also über in die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für ω:

$$4. \; \omega_{uv} = \sin\omega.$$

Schliesslich lassen sich noch die Gleichungen:

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0, \; \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = 0$$

durch Elimination von $F = \sqrt{EG}\cos\omega$ aus denselben in die Form bringen:

$$\frac{d}{dv}(\sqrt{E}) = \frac{d}{du}(\sqrt{G}\cos\omega); \quad \frac{d}{du}(\sqrt{G}) = \frac{d}{dv}(\sqrt{E}\cos\omega).$$

Durch Addition bez. Subtraktion dieser 2 Gleichungen erhalten wir:

$$\frac{d}{dv}\left(\sqrt{E}\cos^2\frac{\omega}{2}\right) = \frac{d}{du}\left(\sqrt{G}\cos^2\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\frac{d}{dv}\left(\sqrt{E}\sin^2\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{d}{du}\left(\sqrt{G}\sin\frac{\omega^2}{2}\right).$$

Setzen wir nun:

$$\sqrt{E}\cos\frac{{}^2\omega}{2} = M_u \text{ und } \sqrt{G}\cos^2\frac{\omega}{2} = M_v,$$

so besagt die erste Gleichung, dass M eine Funktion von u und v ist mit dem totalen Differential:

$$dM = \sqrt{E}\cos^2\frac{\omega}{2}\,du + \sqrt{G}\cos^2\frac{\omega}{2}\,dv;$$

die zweite Gleichung sagt aus, dass M der Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dv}\left(M_u \tan^2\frac{\omega}{2}\right) + \frac{d}{du}\left(M_v \tan^2\frac{\omega}{2}\right) = 0$$

genügen muss. Diese lässt sich leicht in die einfachere Gestalt bringen:

$$5. \quad M_{uv}\sin\omega + M_u\,\omega_v + M_v\,\omega_u = 0.\ ^{1)}$$

---

[1]) Diese Gleichung ist von A. Razzaboni in seiner Abhandung: Delle superficie sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema conjugato (Memorie della Reale Acad. delle scienze dell' istituto di Bologna, ser. 4, t. 9, 24. Febbraio 1889, pag. 12) durch die Substitution: $M = M'\tan\frac{\omega}{2}$ in die folgende transformiert worden: $M'_{uv} = M'\frac{\tau_{uv}}{\tau}$, wo $\tau = \tan\frac{\omega}{2}$ gesetzt ist. Da aber diese Form der Differentialgleichung 5. hier keine Vorteile bietet, werden wir im Folgenden von derselben keinen Gebrauch machen.

Es liefert also für jedes ω, das der Gleichung 4. genügt, irgend eine particuläre Lösung M der Differentialgleichung 5. die Fundamentalgrössen einer V-Fläche mit Hilfe folgender Beziehungen:

$$A. \begin{cases} \sqrt{E} = \dfrac{M_u}{\cos^2\frac{\omega}{2}}; \sqrt{G} = \dfrac{M_v}{\cos^2\frac{\omega}{2}}; F = \sqrt{EG} \cos \omega; \\ D = -k \sqrt{E} \sin \omega; D'' = -\dfrac{1}{k}\sqrt{G} \sin \omega; D' = 0. \end{cases}$$

Die Grössen e, f, g erhalten mit Hilfe der Formeln 4. des § 1 die Werte:

$$e = k^2; f = -\cos \omega; g = \frac{1}{k^2},$$

so dass die Coordinaten der V-Fläche infolge der Gleichungen 8. des § 1 die Differentialquotienten besitzen:

$$B. \begin{cases} x_u = -\dfrac{k\sqrt{E}}{\sin \omega}\left(\dfrac{1}{k^2}X_u + \cos \omega X_v\right), \\ x_v = -\dfrac{\sqrt{G}}{k \sin \omega}(k^2 X_v + \cos \omega X_u). \end{cases}$$

(analog für y und z).

Um noch die Coordinaten X, Y, Z des sphärischen Bildpunktes zu ermitteln, beachten wir, dass das Quadrat des Längenelements auf der Kugel die einfache Gestalt hat:

$$ds'^2 = k^2 du^2 - 2 \cos \omega \, du \, dv + \frac{1}{k^2} dv^2.$$

Das nämliche Längenelement besitzt aber auch irgend eine auf ihre Haupttangentencurven als Parameterlinien u, v bezogene S-Fläche, deren Fundamentalgrössen die Werte haben:

$$A. \begin{cases} E = R^2 k^2; \; F = R^2 \cos \omega; \; G = R^2 \frac{1}{k^2}; \\ D = 0 \quad ; \; D' = R \sin \omega; \; D'' = 0. \end{cases}$$ [1]

---

[1]) S. Bianchi pag. 126 u. 130. Wir halten auch hier daran fest, dass k von 1 verschieden ist.

Hiebei sind R und k beliebige Constante, während ω, der Winkel der Parameterlinien, der Differentialgleichung 4. genügt. Die Coordinaten ξ, η, ζ der S-Fläche haben die Differentialquotienten:

$$B. \begin{cases} \xi_u = -\dfrac{R}{\sin\omega}(k^2 X_v + \cos\omega\, X_u), \\ \xi_v = -\dfrac{R}{\sin\omega}(\dfrac{1}{k^2} X_u + \cos\omega\, X_v) \end{cases}$$

(analog für η und ζ).

Wir erkennen also, dass für den nämlichen Wert von ω die V Fläche und die S-Fläche das nämliche sphärische Bild ihrer Parameterlinien besitzen und demnach durch Parallelismus der Normalen in entsprechenden Punkten associiert sind. Wir erhalten also zur Auffindung von V-Flächen folgenden[1]) Satz:

I. Jeder vorgegebenen, auf ihre Haupttangentencurven als Parameterlinien bezogenen S-Fläche ist durch Parallelismus der Normalen eine ganze Klasse von auf ein conjugiertes System geodätischer Linien bezogenen V-Flächen associiert, wobei der ihnen gemeinsame Winkel ω der Parameterlinien der Gleichung 4. genügt. Jede Lösung M der Differentialgleichung 5. liefert eine V-Fläche, deren Fundamentalgrössen aus den Formeln A. *und deren Coordinaten durch Quadratur aus* B. *gefunden werden.*

Je nachdem nun die Funktion M positive oder negative Differentialquotienten M_u bez. M_v besitzt, haben $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ positive oder negative Vorzeichen.

Umgekehrt lässt sich zu einer vorgegebenen ganzen Klasse von auf das conjugierte System geodätischer Linien bezogenen V-Flächen die auf ihre Haupttangentencurven bezogene associierte S-Fläche mit den Fundamen-

---

[1]) Dieses Resultat hat bereits Voss in seiner oben genannten Abhandlung für den Fall: $k = 1$ gefunden.

grössen A. aus den Formeln B. durch Quadratur ermitteln, wo R eine beliebige Constante bedeutet.

Während also die S-Fläche das constante negative Krümmungsmass: $K = -\frac{1}{R^2}$ besitzt, ergibt sich für das Krümmungsmass der V-Fläche: $K = \frac{1}{\sqrt{EG}}$, das je nach dem Vorzeichen von $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ positiv oder negativ ist, so dass wir V-Flächen mit elliptischer und mit hyperbolischer Krümmung erhalten. Parabolische Punkte oder Curven sind stets singulärer Art, da für diese E oder G unendlich sein muss.

Ist $\sqrt{E} = \sqrt{G}$, so ist M eine Funktion von $u + v$. Die Fläche wird durch die conjugierten geodätischen Linien in Rhomben geteilt und besitzt elliptische Krümmung. Ferner ist die Normalkrümmung auf den geodätischen Linien gleich und die Krümmungslinien halbieren die Winkel derselben.

Ist dagegen $\sqrt{E} = -\sqrt{G}$, so ist die Fläche eine Minimalfläche, deren Haupttangentencurven die Richtungen der geodätischen Linien halbieren. Nach *Razzaboni*[1]) gibt es nur eine V-Fläche dieser Art, nämlich die gemeine Schraubenfläche; auf dieser sind unendlich viele conjugiert-geodätische Systeme möglich.

§ 3.

2. Lösung des Problems der V-Flächen.

Um auf eine zweite Weise das Problem der Auffindung von V-Flächen zu lösen, benützen wir die von *Darboux*[2]) eingeführten beweglichen Trieder. Konstruieren

---

[1]) obengen. Abh. pag. 6 u. 10.

[2]) Darboux, Leçons etc, I. part. pag. 47 und ff.

wir nämlich im Punkte x, y, z einer Fläche das rechtwinklige Trieder, das gebildet wird von der Flächennormale (X_1, Y_1, Z_1), der Tangente der Curve v (X_2, Y_2, Z_2) und der Tangente der zur Curve v senkrechten Trajektorie (X_3, Y_3, Z_3), so gelten folgende Beziehungen:

$$1.\left\{\begin{array}{ll} X_{1u} = X_2 r - X_3 q & X_{1v} = X_2 r_1 - X_3 q_1 \\ X_{2u} = X_3 p - X_1 r & X_{2v} = X_3 p_1 - X_1 r_1 \\ X_{3u} = X_1 q - X_2 p & X_{3v} = X_1 q_1 - X_2 p_1. \end{array}\right.$$

Hiebei sind die Grössen p, q, r; p_1, q_1, r_1 noch näher zu bestimmende Funktionen von u und v und genügen den Integrabilitätsbedingungen:

$$2.\left\{\begin{array}{l} p_v - p_{1u} = q r_1 - r q_1, \\ q_v - q_{1u} = r p_1 - p r_1, \\ r_v - r_{1u} = p q_1 - q p_1. \end{array}\right.$$

Konstruieren wir ebenso das Trieder, das gebildet wird von der Flächennormale ($X'_1 = X_1$, $Y'_1 = Y_1$, $Z'_1 = Z_1$), der Tangente der Curve u (X'_2, Y'_2, Z'_2) und der Tangente der zur Curve u senkrechten Trajektorie (X'_3, Y'_3, Z'_3), so gelten analoge Gleichungen 1'. und 2'., in denen sämtliche Grössen mit Strichen versehen sind.

Es handelt sich nun vor allem darum, die unbekannten Funktionen p, p_1, p', p'_1 etc. so zu bestimmen, dass die Fläche eine V-Fläche darstellt.

Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst die Beziehungen zwischen den gestrichenen und nicht gestrichenen Grössen aufsuchen.

Die Flächennormale ist bei beiden Triedern die nämliche; ferner schliessen die Curven u und v mit einander den Winkel ω ein. Da nun die Grössen X_2, X_3, X'_2, X'_3 die Projektionen der vom Flächenpunkte aus auf den entsprechenden Geraden abgetragenen Längeneinheit auf die x-Axe darstellen, so können wir analog

den bei einer Coordinatentransformation giltigen Formeln die Beziehungen aufstellen:

$$3. \begin{cases} X'_1 = X_1 \\ X'_2 = X_2 \cos\omega - X_3 \sin\omega \\ X'_3 = -X_2 \sin\omega - X_3 \cos\omega. \end{cases}$$ [1])

Differenzieren wir nun diese drei Gleichungen nach u und v und substituieren für die Differentialquotienten der X_i und X'_i die durch die Gleichungen 1. und 1'. gegebenen Werte, ersetzen sodann mit Hilfe der Gleichungen 3. die X'_i durch die X_i, so erhalten wir sechs Gleichungen mit den drei Unbekannten X_1, X_2, X_3, welche, da man X_i mit Y_i und Z_i vertauschen kann und die Determinante der Gleichungen von Null verschieden ist, nur dann gleichzeitig bestehen können, wenn sämtliche Coefficienten derselben verschwinden. Dies liefert dann folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} p' &= -p + \omega_u \\ q' &= -q\cos\omega + r\sin\omega \\ r' &= q\sin\omega + r\cos\omega \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p'_1 &= -p_1 + \omega_v \\ q'_1 &= -q_1\cos\omega + r_1\sin\omega \\ r'_1 &= q_1\sin\omega + r_1\cos\omega. \end{aligned}$$

Beachten wir nun, dass der Differentialquotient, den der Richtungscosinus der Tangente einer Curve nach dem Parameter der Curve besitzt, proportional ist zum Cosinus der Hauptnormale derselben und in unserem Falle, da die Curve eine geodätische Linie ist, deren Hauptnormale mit der Flächennormale zusammenfällt, auch proportional ist zum Cosinus der Flächennormale, so muss, da die Curven v, u die Parameter u, v besitzen,

[1]) Diese Formeln unterscheiden sich von denjenigen einer Coordinatentransformation nur durch die Vertauschung von X'_3 mit $-X'_3$. Hiermit erreichen wir Symmetrie in Bezug auf die Curven v und u und können somit alle im Folgenden für die Curven v abgeleiteten Formeln sofort auf die Curven u übertragen, lediglich durch Vertauschung von v mit u, k mit $\frac{1}{k}$ und der nicht gestrichenen Grössen mit den gestrichenen.

X_{2u} proportional zu X_1 und X'_{2v} proportional zu X'_1 sein. In den Gleichungen 1. und 1'. müssen also p und p'_1 verschwinden.

Ferner liefert uns die Gleichung:

$$D' = -\Sigma X_{1v}\, x_u = 0,$$

wenn wir für X_{1v} den in 1. angegebenen Wert und für x_u den aus 1. im § 2 resultierenden Wert $\sqrt{E} \cdot X_2$ einsetzen, das Verschwinden von r_1.

Die drei übrigen für die V-Flächen charakteristischen Gleichungen:

$$\begin{aligned} e &= \Sigma X_{1u}^2 = r^2 + q^2 = k^2 \\ f &= \Sigma X_{1u} X_{1v} = r r_1 + q q_1 = -\cos\omega \\ g &= \Sigma X_{1u}^2 = r_1^2 + q_1^2 = \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

gestatten uns, da $r_1 = 0$ ist, für r, q, q_1 die Werte zu setzen:

$$q_1 = \frac{1}{k};\; q = -k\cos\omega;\; r = k\sin\omega.$$

Wir erhalten also:

$$4.\quad \begin{cases} p = 0 \\ q = -k\cos\omega \\ r = k\sin\omega \end{cases} \qquad \begin{aligned} p_1 &= \omega_v \\ q_1 &= \frac{1}{k} \\ r_1 &= 0. \end{aligned} \quad \text{Ebenso}$$

$$4'.\quad \begin{cases} p' = \omega_u \\ q' = k \\ r' = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} p'_1 &= 0 \\ q'_1 &= -\frac{1}{k}\cos\omega \\ r'_1 &= \frac{1}{k}\sin\omega. \end{aligned}$$

Die Bedingungsgleichungen 2. und 2'. liefern ausser der Differentialgleichung:

$$\omega_{uv} = \sin\omega$$

nur Identitäten.

Die Gleichungen 1. und 1'. werden also die Form annehmen:

$$\text{A.}\begin{cases} X_{1u} = X_2 k \sin\omega + X_3 k \cos\omega \\ X_{2u} = -X_1 k \sin\omega \\ X_{3u} = -X_1 k \cos\omega \end{cases} \quad \begin{aligned} X_{1v} &= -X_3 \frac{1}{k} \\ X_{2v} &= X_3 \omega_v \\ X_{3v} &= X_1 \frac{1}{k} - X_2 \omega_v . \end{aligned}$$

$$\text{A}'.\begin{cases} X'_{1u} = -X'_3 k \\ X'_{2u} = X'_3 \omega_u \\ X'_{3u} = X'_1 k - X'_2 \omega_u \end{cases} \quad \begin{aligned} X'_{1v} &= X'_2 \frac{1}{k} \sin\omega + X'_3 \frac{1}{k} \cos\omega \\ X'_{2v} &= -X'_1 \frac{1}{k} \sin\omega \\ X'_{3v} &= -X'_1 \frac{1}{k} \cos\omega . \end{aligned}$$

Um nun unser Problem zu lösen, gehen wir von den Weingarten'schen Ebenencoordinaten der V-Fläche aus. Bezeichnen wir den Abstand der Tangentialebene im Punkte x y z vom Coordinatenanfangspunkte mit r, so ist:

$$5.\quad X_1 x + Y_1 y + Z_1 z = r.$$

Durch Differentiation nach u und v erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichungen A., sowie unter Zuhilfenahme der Formeln 3. des § 1 die weiteren Gleichungen:

$$6.\quad X_2 x + Y_2 y + Z_2 z = \frac{r_u + k^2 \cos\omega\, r_v}{k \sin\omega}$$

$$7.\quad X_3 x + X_3 y + Z_3 z = -k\, r_v.$$

Die Gleichungen 5—7. sind linear in den drei unbekannten Coordinaten x, y, z der V-Fläche, welche somit die Werte besitzen:

$$8.\quad x = X_1 r + X_2 \frac{r_u + k^2 \cos\omega\, r_v}{k \sin\omega} - X_3 k\, r_v.$$

(Analoge Gleichungen gelten für y und z.)

Differenzieren wir die Gleichung 7. nach u, so erhalten wir:

$$9.\quad r_{uv} = r \cos\omega.$$

Wir erkennen also aus der Gleichung $\omega_{uv} = \sin \omega$, dass das sphärische Bild des conjugierten Systems geodätischer Linien der V-Fläche identisch ist mit dem sphärischen Bilde der Haupttangentencurven einer S-Fläche, und ersehen ferner aus den Gleichungen A., *dass die gemeinschaftlichen Richtungscosinus* (X_1, Y_1, Z_1) *der Normalen Lösungen der Laplace'schen Differentialgleichung:* $\Theta_{uv} = \Theta \cos \omega$ *sind.*

Wir erhalten also zur Auffindung von V-Flächen folgenden Satz:

II. Die Klasse der einer vorgegebenen S-Fläche associierten V-Flächen erhalten wir durch Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung: $r_{uv} = r \cos \omega$. *Zu jeder particulären Lösung derselben gehört eine V-Fläche, deren Coordinaten die Werte 8. dieses § haben.*

In dem speciellen Falle, dass r eine lineare Funktion von X_1, Y_1, Z_1 ist, so dass:

$$r = \alpha X_1 + \beta Y_1 + \gamma Z_1,$$

reduciert sich die V Fläche auf den Punkt: $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$.

Obiger Satz stammt von *Guichard*, der jedoch auf einem anderen Wege zu ihm gelangte. Er ging nämlich von der Frage aus:

> „Gibt es Strahlensysteme, deren abwickelbare Flächen mit den Brennflächen die Krümmungslinien gemein haben?"

fand unter Benützung des Trieders, das von den Tangenten der Krümmungslinien und der Flächennormale gebildet wird, den Satz:

> „Jede G-Fläche hat als eine Evolutenfläche eine V-Fläche",

und gelangte dann bei der Untersuchung der Eigenschaften der V-Flächen zum obigen Resultat.

Während er jedoch nur für den Fall, dass k den Wert 1 besitzt, die Ableitung gab, haben wir den Satz

unter Benützung zweier anderer Trieder für den Fall, dass k eine beliebige Constante ist, verallgemeinert.

Um nun auch den Zusammenhang der G-Flächen mit den V-Flächen zu erkennen, wollen wir den begonnenen Weg weiter verfolgen und werden so zur Umkehrung des Guichard'schen Satzes gelangen.

§ 4.

Die G-Flächen- und G-Strahlensysteme.

Wir betrachten zunächst das Strahlensystem der Tangenten der Curve v einer V-Fläche.

Da diese Curven geodätische Linien auf der V-Fläche sind, so ist das Strahlensystem ihrer Tangenten ein Normalensystem. [1]) Die beiden durch den Punkt x, y, z der V-Fläche gehenden abwickelbaren Scharen desselben umhüllen die V-Fläche längs der beiden Curven u und v, welche nicht nur, wie im allgemeinen Falle conjugiert, sondern auch geodätische Linien sind.

Dieser Eigenschaft des Normalensystems entspricht auch eine Eigenschaft der unendlich vielen (parallelen) Evolventenflächen G. Ziehen wir nämlich das Strahlensystem der Tangenten der Krümmungslinien v einer Fläche G_1, welche den Normalen in entsprechenden Punkten der V Fläche parallel sind, so umhüllt dasselbe nicht nur die Fläche G_1 längs deren Krümmungslinien, sondern das conjugierte System, längs welchem der zweite Mantel G_2 der Brennfläche dieses Strahlensystems umhüllt wird, besteht ebenfalls aus den Krümmungslinien von G_2.

Um dies nachzuweisen, werden wir das Quadrat des Flächenelements für die auf die Curven u, v bezogene

---

[1]) Vergleiche Bianchi pag. 248.

Fläche G_2 bestimmen und finden, dass der Coefficient F_2 von du dv verschwindet.

Der Strahl, welcher die Punkte $M_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ von G_1 und $M_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ von G_2 verbindet, hat die Richtung X_1, Y_1, Z_1 und besitzt die Länge ρ. Die Coordinate ξ_1 hat den Wert: $\xi_1 = x + t X_2$, wo t der Abstand des Punktes ξ_1, η_1, ζ_1 von x, y, z ist und gefunden wird aus:

$$t = C - \int (\Sigma X_2 x_u \, du + \Sigma X_2 x_v \, dv) \text{ [1]},$$

so dass:

$$1. \quad t_u = - \Sigma X_2 x_u ; \; t_v = - \Sigma X_2 x_v$$

ist.

Unter Benützung der Formeln 1. des § 1 und unter Zuhilfenahme folgender Hilfsformeln:

$$2. \begin{cases} \Sigma X_{1u} x_v = 0 ; \; \Sigma X_{1v} x_u = 0 \\ \Sigma X_3 x_u = 0 ; \; \Sigma x_3 x_{uu} = 0 \\ \Sigma X_3 x_{uv} = - t_u \omega_v \end{cases}$$

erhalten wir für die Differentialquotienten ξ_{1u} und ξ_{1v} die Werte:

$$3. \quad \xi_{1u} = - X_1 kt \sin \omega ; \; \xi_{1v} = X_3 \left(t\omega_v + t_v \frac{\sin \omega}{\cos \omega.}\right)$$

Die Coordinate ξ_2 von G_2 hat den Wert:

$$\xi_2 = \xi_1 + \rho X_1 .$$

Um ρ zu bestimmen, beachten wir, dass

$$d\xi_2 = d\xi_1 + X_1 \, d\rho + \rho \, dX_1$$

zu X_1 proportional sein muss, etwa gleich λX_1. Hieraus folgt die Gleichung:

$$\xi_{1u} \, du + \xi_{1v} \, dv + \rho X_{1u} \, du + \rho X_{1v} \, dv + (d\rho - \lambda) X_1 = 0.$$

Bilden wir die analogen Gleichungen für $d\eta_2$ und $d\zeta_2$, multiplizieren die drei Gleichungen einmal mit X_{1u}, Y_{1u}, Z_{1u} und einmal mit X_{1v}, Y_{1v}, Z_{1v} und addieren, so er-

[1]) Bianchi, pag. 268.

halten wir zwei lineare und homogene Gleichungen für die beiden Unbekannten du und dv. Da die Determinante verschwinden muss, so ist entweder $\rho = 0$, was die Fläche G_1 liefert, oder

$$4.\quad \rho = k\left(t\omega_v + t_v \frac{\sin\omega}{\cos\omega}\right).$$

Für ρu gilt die Beziehung:

$$5.\quad \rho_u = k\,t\sin\omega.$$

Diese Formeln 4. und 5. gestatten uns, für die Differentialquotienten von ξ_1 und ξ_2 folgende Werte festzulegen, die von t unabhängig sind:

$$6.\quad \begin{cases} \xi_{1u} = -\rho_u X_1 \\ \xi_{1v} = -\rho X_{1v} = \frac{1}{k}\rho X_3 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} \xi_{2u} &= \rho X_{1u} = -\rho k X'_3, \\ \xi_{2v} &= \rho_v X_1. \end{aligned}$$

Die Fundamentalgrössen der Fläche G_1 werden dann:

$$7.\quad \begin{cases} E_1 = \rho_u{}^2 \\ F_1 = 0 \\ G_1 = \frac{1}{k^2}\rho^2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} D_1 &= -k\,\rho_u \sin\omega \\ D'_1 &= 0 \\ D''_1 &= -\frac{1}{k}\rho\,\omega_v. \end{aligned}$$

Da wir für die Normalenrichtung von G_2 leicht die Werte X'_2, Y'_2, Z'_2 verificieren können, werden die Fundamentalgrössen der Fläche G_2:

$$8.\quad \begin{cases} E_2 = k^2\rho^2 \\ F_2 = 0 \\ G_2 = \rho_v{}^2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} D_2 &= k\rho\,\omega_v \\ D'_2 &= 0 \\ D''_2 &= \frac{1}{k}\rho_v \sin\omega. \end{aligned}$$

Da also F_1 und D'_1, sowie F_2 und D'_2 verschwinden, so sind die Curven u und v auf beiden Flächen die Krümmungslinien, womit unsere obige Behauptung bewiesen ist.

Diese Strahlensysteme wurden zuerst von *Guichard* behandelt und deshalb von *Bianchi* als Guichard'sche Strahlensysteme bezeichnet, während deren Brennflächen Guichard'sche Flächen heissen.

Wir haben somit den Satz[1]) bewiesen:

„Die ∞^1 Evolventenflächen einer V-Fläche bezüglich der einen oder der andern Schar des conjugiert-geodätischen Systems sind G-Flächen.“

Dass nämlich für die Curven u der V-Flächen das nämliche gilt wie für die Curven v, folgt aus der Symmetrie der Gleichungen A. und A'. des § 3.[2]).

Um schliesslich, wie *Guichard*, ein von der V-Fläche unabhängiges Verfahren zur Auffindung von G-Strahlensystemen zu erhalten, differenzieren wir Gleichung 5. nach v. Es wird dann:

$$9. \quad \rho_{uv} = \rho \cos \omega,$$

so dass wir folgenden Satz aussprechen können:

III. Einer vorgegebenen S-Fläche ist eine ganze Klasse von G-Strahlensystemen derart associiert, dass jeder Strahl mit der Normale der S-Fläche gleiche Richtung hat. Jede Lösung ρ der Gleichung 9. stellt die Entfernung der Brennpunkte dar. Die Fundamentalgrössen der Brennflächen G_1 und G_2 haben die Werte 7. und 8.; deren Coordinaten erhält man durch Quadratur aus 6.

Die Sätze I—III der §§ 2—4 zeigen uns, dass die Kenntnis einer S-Fläche zur Ermittlung einer V-Fläche oder eines G-Strahlensystems noch nicht genügt, sondern dass noch eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung hiezu notwendig ist. Hiebei ist es gleichgiltig, ob man zuerst eine Lösung M des § 2 oder r des § 3 oder ρ des § 4 gefunden hat, da sich aus jeder dieser

---

[1]) Diesen Satz hat bereits Bianchi ausgesprochen in seiner Differentialgeometrie, pag. 285.

[2]) Siehe Anmerkung im § 3.

drei Differentialgleichungen die anderen durch kurze Rechnung ergeben.

Wir erkennen hieraus den engen Zusammenhang der Voss'schen Methode mit der von einem ganz anderen Gesichtspunkte ausgehenden Guichard'schen Methode, indem lediglich die Integration einer Differentialgleichung für verschiedene Funktionen gefordert wird, von denen aber jede einzelne das Problem vollständig löst.

Hat man nun eine solche Lösung gefunden, so bedarf es zur Auffindung einer ganzen Klasse von V-Flächen bez. G-Strahlensystemen nur einer Transformation der charakteristischen r oder ρ, wie *Guichard* gezeigt hat, oder der Funktion M, was wir im folgenden Paragraphen erörtern wollen.

§ 5.

Transformation einer gegebenen V-Fläche und eines gegebenen G-Strahlensystems.

Zunächst wollen wir beweisen, dass, wie sich vermuten lässt, auch diejenige Evolutenfläche der Fläche G_2, welche der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Curven u von G_2 ist, eine V-Fläche ist.

Diese Evolutenfläche, die wir mit V' bezeichnen wollen, ist die Enveloppe der im Punkte $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$ von G_2 auf dem Strahl $X_1\,Y_1\,Z_1$ senkrecht stehenden Ebene. Diese Ebene enthält nämlich die Normale von G_2, also auch den gesuchten Punkt $x'\,y'\,z'$ von V', und ist, da die Normale von V' parallel zur Tangente $X_1\,Y_1\,Z_1$ der Curve u von G_2 sein muss, auch Tangentialebene von V'. Bezeichnen wir den Abstand dieser Ebene vom Coordinatenanfangspunkt mit r', so ist die Gleichung derselben in den Weingarten'schen Ebenencoordinaten:

$$X_1\,x' + Y_1\,y' + Z_1\,z' = r'.$$

Durch Differentiation erhalten wir, analog wie im § 3 (Gl. 5 und ff.):

$$r'_{uv} = r' \cos \omega.$$

Nach dem Satze II des § 3 haben wir in dieser Fläche V′ mit den charakteristischen Grössen $(X_1\, Y_1\, Z_1\, r')$ eine neue V-Fläche. Teilen wir nun den Abstand ρ der Brennpunkte sämtlicher Strahlen unseres G-Strahlensystems nach einem constanten Verhältnis $\varkappa$, so umhüllen die in diesen Punkten auf dem Strahl senkrecht stehenden Ebenen, da die 4 Grössen $(X_1\, Y_1\, Z_1\, r + \varkappa\rho)$ Lösungen von: $\Theta_{uv} = \Theta \cos \omega$ sind, ebenfalls V-Flächen. Im speciellen Falle: $\varkappa = 0$ erhalten wir die Fläche V, für $\varkappa = 1$ die Fläche V′.

Weit interessanter als diese Art, aus einem G-Strahlensystem neue V-Flächen und somit neue G-Strahlensysteme zu erhalten, ist die folgende sogenannte Guichard'sche Transformation.

Es liefern nämlich die Tangenten an die Curven u von V eine unendliche Anzahl paralleler Flächen G''_2, die Tangenten an die Curven u einer solchen Fläche G''_2 ein G-Strahlensystem mit der Entfernung ρ'' der Brennpunkte; die Normalen längs der Krümmungslinien v der zweiten Brennfläche G''_1 schneiden sich in einer Fläche V″. Ebenso liefern die Tangenten an die Curven v von V′ ∞^1 parallele Flächen G'_1, deren Tangenten an die Curven v ein G-Strahlensystem mit der charakteristischen Funktion ρ' u. s. w. Wir erkennen sofort wie sich diese Konstruktion beliebig fortsetzen lässt (S. Fig. 1).

Berücksichtigen wir, um dies analytisch zu beweisen, dass die Tangenten an die Curven v der V-Flächen stets die Richtung $X_2\, Y_2\, Z_2$, die Tangenten an die Curven u der V-Flächen stets die Richtung $X'_2\, Y'_2\, Z'_2$ und die Normalen der V-Flächen, sowie die G-Strahlensysteme stets die Richtung $X_1\, Y_1\, Z_1$ besitzen, so brauchen wir nur noch die zugehörigen Grössen r bez. ρ aufzusuchen

und zu zeigen, dass sie der Differentialgleichung genügen:

$$\Theta_{uv} = \Theta \cos \omega.$$

Es hat nämlich der Punkt $\xi'_1 \eta'_1 \zeta'_1$ von G'_1, da er in der durch $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$ gehenden auf ρ senkrecht stehenden Tangentialebene von V' liegt, die Coordinaten:

$$\xi'_1 = \xi_2 + \lambda' X_2 + \chi' X_3.$$

Analoge Gleichungen gelten für η'_1 und ζ'_1. Durch Differentiation nach u und v erhalten wir:

$$\xi'_{1u} = -(\lambda' \sin \omega + \chi' \cos \omega)\, k X_1 + (\lambda'_u + \rho\, k \sin \omega)\, X_2 + (\chi'_u + \rho\, k \cos \omega)\, X_3,$$

$$\xi'_{1v} = (\rho_v + \frac{1}{k}\chi')\, X_1 + (\lambda'_v - \chi'\omega_v)\, X_2 + (\chi'_v + \lambda'\omega_v) X_3.$$

Durch ähnliche Betrachtungen wie im § 4 lässt sich nun zeigen, dass ξ'_{1u} und ξ'_{1v} analog den Formeln 6. des § 4 in folgender Form darstellbar sind:

$$\xi'_{1u} = -\rho'_u X_1,$$

$$\xi'_{1v} = \frac{1}{k}\rho' X_3.$$

Es müssen also in den obigen Gleichungen die Coefficienten von X_2 und X_3, bez. die Coefficienten von X_1 und X_2 verschwinden, während die übrigen Coefficienten die die Werte:

$$-\rho'_u \text{ und } \frac{1}{k}\rho'$$

besitzen.

Es bestehen also die Gleichungen:

$$\chi' = k \rho_v, \quad \chi'_u = -k \rho \cos \omega, \quad \chi'_v = -k \rho_{vv}.$$

$$1. \begin{cases} \lambda'_u = -k \rho \sin \omega, \\ \lambda'_v = -k \rho_v \omega_v. \end{cases}$$

$$\text{I.} \begin{cases} \rho' = -k^2 \rho_{vv} + k\lambda'\omega_v, \\ \rho'_u = -k^2 \rho_v \cos \omega + k\lambda' \sin \omega, \\ \rho'_{uv} = \rho' \cos \omega. \end{cases}$$

Ganz analog können wir von den Coordinaten $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ von G_1 ausgehen und finden dann als die Coordinaten $\xi''_2 \eta''_2 \zeta''_2$ von G''_2 die Werte: $\xi''_2 = \xi_1 - \lambda'' X'_2 - \chi'' X'_3$. Es wird somit:

$$\xi''_{2u} = -(\rho_u + k\chi'')X'_1 - (\lambda''_u - \chi''_u \omega)X'_2 - (\chi''_u + \lambda'' \omega_u)X'_3,$$

$$\xi''_{2u} = (\lambda'' \sin\omega + \chi'' \cos\omega)\frac{1}{k}X'_1 - (\lambda''_v + \frac{1}{k}\rho \sin\omega)X_2'$$
$$- (\chi''_v + \frac{1}{k}\rho\cos\omega)X_3'.$$

Da aber:

$$\xi''_{2u} = -k\rho'' X'_3,$$
$$\xi''_{2v} = \rho''_v X'_1,$$

so bestehen die Gleichungen:

$$\chi'' = -\frac{1}{k}\rho_u,$$
$$\chi''_u = -\frac{1}{k}\rho_{uu},$$
$$\chi''_v = -\frac{1}{k}\rho\cos\omega.$$

$$2. \begin{cases} \lambda''_u = -\frac{1}{k}\rho_u \omega_u, \\ \lambda''_v = -\frac{1}{k}\rho\sin\omega. \end{cases}$$

$$\text{II.} \begin{cases} \rho'' = -\frac{1}{k^2}\rho_{uu} + \frac{1}{k}\lambda''\omega_u, \\ \rho''_v = -\frac{1}{k^2}\rho_u\cos\omega + \frac{1}{k}\lambda''\sin\omega, \\ \rho''_{uv} = \rho''\cos\omega. \end{cases}$$

Gehen wir nun dazu über, r' und r'' zu bestimmen, so berücksichtigen wir, dass die Coordinaten des Punktes $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$, der in der Tangentialebene r von V liegt, der Gleichung genügt:

$$X_1 \xi_1 + Y_1 \eta_1 + Z_1 \zeta_1 = r.$$

Durch Differentiation nach v erhalten wir:

$$X_3 \xi_1 + Y_3 \eta_1 + Z_3 \zeta_1 = -kr_v.$$

Setzen wir noch:

$$X_2 \xi_1 + Y_2 \eta_1 + Z_2 \zeta_1 = \tau',$$

so wird:

$$\xi_1 = X_1 r + X_2 \tau' - X_3 k r_v,$$

Folglich ist:

$$\xi_{1u} = (r_u - k\tau' \sin\omega + k^2 r_v \cos\omega) X_1 + (\tau'_u + kr \sin\omega) X_2,$$

$$\xi_{1u} = (\tau'_v + k\, r_v\, \omega_v) X_2 - (k\, r_{vv} - \tau' \omega_v + \frac{1}{k} r) X_3.$$

Durch Vergleichung mit Formel 6 des § 4 erhalten wir, da $r' = \rho + r$ ist:

$$3.\ \begin{cases} \tau'_u = -k\, r \sin\omega \\ \tau'_v = -k\, r_v\, \omega_v \end{cases} \qquad \text{III.} \begin{cases} r' = -k^2 r_{vv} + k\tau' \omega_v, \\ r'_u = -k^2 r_v \cos\omega + k\tau' \sin\omega, \\ r'_{uv} = r' \cos\omega. \end{cases}$$

Ganz analog ist:

$$\xi''_2 = X'_1 r + X'_2 \tau'' - \frac{1}{k} X'_3 r_u$$

$$\xi''_{2u} = (\tau'_u + \frac{1}{k} r_u\, \omega_u) X_2' - (\frac{1}{k} r_{uu} - \tau'' \omega_u + kr) X'_3,$$

$$\xi''_{2v} = (r_v - \frac{1}{k} \tau'' \sin\omega + \frac{1}{k^2} r_u \cos\omega) X'_1 + (\tau''_v + \frac{1}{k} r \sin\omega) X'_2.$$

Da $r'' = r - \rho''$ ist, so finden wir:

$$4.\ \begin{cases} \tau''_u = -\frac{1}{k} r_u\, \omega_u \\ \tau''_v = -\frac{1}{k} r \sin\omega \end{cases} \qquad \text{IV.} \begin{cases} r'' = -\frac{1}{k^2} r_{uu} + \frac{1}{k} \tau'' \omega_u, \\ r''_v = -\frac{1}{k^2} r_u \cos\omega + \frac{1}{k} \tau'' \sin\omega, \\ r''_{uv} = r'' \cos\omega. \end{cases}$$

Führen wir also folgende Definitionen ein:

$$T'(x) = -k^2 x_{vv} + k\, \Theta\, \omega_v,$$

wo Θ aus den Gleichungen:

$$\Theta_u = -k\, x \sin\omega,$$
$$\Theta_v = -k\, x_v\, \omega_v, \text{ und}$$

$$T''(x) = -\frac{1}{k^2} x_{uu} + \frac{1}{k} \Theta\, \omega_u,$$

wo Θ aus den Gleichungen:

$$\Theta_u = -\frac{1}{k} x_u \omega_u,$$

$$\Theta_v = -\frac{1}{k} x \sin \omega$$

durch Quadratur gefunden wird, *so haben die Grössen* $\rho' \rho'' r' r''$ *die Werte:*

$$\begin{array}{l|l} \rho' = T'(\rho) & r' = T'(r) \\ \rho'' = T''(\rho) & r'' = T''(r) \end{array}$$

und sind ausserdem mit ρ *und* r *durch die Beziehungen:*

$$\rho = r' - r$$
$$\rho'' = r - r''$$

verbunden.

Diese Transformation lässt sich für die Grössen $\rho^{(i)}$ und $r^{(i)}$ beliebig fortsetzen, *so dass wir eine unendliche Anzahl von* $V^{(i)}$*-Flächen und* $G^{(i)}$*-Strahlensystemen erhalten.*

Wir haben bereits bemerkt, dass die im Punkte $\varkappa \rho$ auf ρ senkrecht stehende Ebene, ebenfalls eine V-Fläche mit der charakteristischen Funktion:

$$r_1 = r + \varkappa \rho$$

umhüllt. Es besitzen dann die transformierten Flächen die charakteristischen Funktionen:

$$r'_1 = T'(r + \varkappa \rho) = T'(r) + \varkappa T'(\rho) = r' + \varkappa \rho',$$
$$r''_1 = T''(r + \varkappa \rho) = T''(r) + \varkappa T''(\rho) = r'' + \varkappa \rho''.$$ D. h.

Die Tangentialebenen der beiden transformierten Flächen obiger V-Fläche teilen die transformierten Brennstrahlen ρ' *und* ρ'' *ebenfalls nach dem nämlichen constanten Verhältnis* $\varkappa$. Hiebei besitzen die beiden G-Strahlensysteme, welche die V-Flächen mit den charakteristischen Funktionen r_1 und r'_1 einerseits und r_1 und r''_1 andrerseits mit einander verbinden, die charakteristischen Funktionen:

$$\rho_1 = r'_1 - r_1 = (r' + \varkappa\rho') - (r + \varkappa\rho) = (1 - \varkappa)\rho + \varkappa\rho',$$
$$\rho_1'' = r_1 - r''_1 = (r + \varkappa\rho) - (r'' + \varkappa\rho'') = (1 - \varkappa)\rho'' + \varkappa\rho.$$

Während nun diese Transformation, die *Guichard* angegeben hat, sich auf die charakteristischen Funktionen r und ρ bezieht, lässt sich auch die charakteristische Funktion M, die *Voss* zur Auffindung der V-Flächen benützt, so transformieren, dass wir ∞ viele neue V-Flächen erhalten. Setzen wir nämlich:

$$\underline{V}. \quad \begin{cases} M'_u = PM_u \quad \text{und} \\ M'_v = QM_v, \end{cases}$$

so geht unter Berücksichtigung der Gleichung 5. des § 2 die Bedingungsgleichung dafür, dass die neue Fläche wieder eine V-Fläche sein soll:

$$M'_{uv} \sin\omega + M'_u\,\omega_v + M'_v\,\omega_u = 0$$

in die folgenden beiden Gleichungen über:

$$(Q - P)\,M_v\,\omega_u + P_v\,M_u \sin\omega = 0,$$
$$(P - Q)\,M_u\,\omega_v + Q_u\,M_v \sin\omega = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich unter Benützung der Beziehung:

$$\frac{M_u}{M_v} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}$$

in die folgende Form bringen:

$$5. \quad \begin{cases} P_v + (P - Q)\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \\ Q_u + (Q - P)\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0. \end{cases}$$

Es lässt sich also jede vorgegebene V-Fläche mit der charakteristischen Funktion M durch die Transformation $\underline{V}$ in eine unendliche Anzahl neuer $V^{(i)}$-Flächen transformieren, wenn nur $P^{(i)}$ und $Q^{(i)}$ particuläre Lösungen der Differentialgleichungen 5. sind. Die Coordinaten der

neuen $V^{(i)}$-Flächen erhalten wir durch Quadratur aus den Gleichungen:

$$x_u^{(i)} = P^{(i)} x_u,$$
$$x_v^{(i)} = Q^{(i)} x_v.$$

Dies ist die von *Peterson* gefundene und von *Stäckel*[1]) ausführlich behandelte Transformation. Der dort[2]) ausgesprochene Satz besagt:

Besitzt die Fläche V ein conjugiertes System u = const. und v = const., das aus lauter geodätischen Linien gebildet wird, und leitet man durch die Gleichungen V. und 5. neue Flächen $V^{(i)}$ her, so sind die Linien u = const. und v = const. auf $V^{(i)}$ ebenfalls conjugiert und geodätisch.

Bei dieser letzteren Transformation ist es indessen erforderlich, particuläre Lösungen von 5. aufzufinden, während die Guichard'sche Transformation nur Quadraturen erfordert; ferner erfahren wir nichts über den geometrischen Zusammenhang der einzelnen $V^{(i)}$-Flächen, sowie über die zwischenliegenden $G^{(i)}$-Strahlensysteme.

§ 6.

Specielle Fälle.

Wir wollen in diesem Paragraphen einige von *Guichard* nur ganz kurz behandelten speciellen Fälle näher untersuchen.

A. r *sei von* X_1, Y_1, Z_1 *linear abhängig.*

Nachdem wir bereits im § 3 gesehen haben, dass sich in diesem Falle die V Fläche auf einen Punkt reduciert, wollen wir hier die zugehörigen G-Strahlensysteme ins Auge fassen.

---

1) Stäckel, Biegungen und conjugierte Systeme (Mathematische Annalen 1897, Bd. 49, pag. 255).

2) ibidem. pag. 264.

Da die Differentialquotienten von x, y, z verschwinden, so ist der Abstand des Punktes x, y, z vom Punkte ξ_1, η_1, ζ_1 constant; also: $t = c$. Folglich: $\rho = k\, c\, \omega_v$ und $\rho_u = k\, c \sin \omega$. Die Hauptkrümmungsradien der Fläche G_1 sind die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$(D_1\, D''_1 - D'^2_1)\, \xi^2 + (E_1\, D''_1 + G_1\, D_1 - 2F_1\, D'_1)\, \xi + E_1\, G_1 - F_1^2 = 0.$$ [1]

Substituieren wir obige Werte von ρ und ρ_u in die durch die Formeln 7. des § 4 gegebenen Werte der Fundamentalgrössen von G_1, so lautet diese Gleichung:

$$\xi^2 - 2\, c\, \xi + c^2 = 0.$$

Die beiden Hauptkrümmungsradien von G_1 sind einander gleich und haben den constanten Wert c.

Aus den Transformationsformeln II. des § 5 erhalten wir ferner:

$$\lambda'' = c' + c \cos \omega; \quad \rho'' = \frac{1}{k}\, c'\, \omega_u.$$

Bestimmen wir nun nach den Formeln 8. des § 4 die Fundamentalgrössen von G''_2 durch Vertauschung von ρ mit ρ'', so werden die Hauptkrümmungsradien von G''_2 die Wurzeln der Gleichung:

$$\zeta^2 - 2\, c'\, \zeta + c'^2 = 0.$$

Es sind also auch die Hauptkrümmungsradien von G''_2 einander gleich und haben den im allgemeinen von c verschiedenen constanten Wert c'.

Die beiden Flächen G_1 und G''_2 sind folglich Kugeln mit beliebigem Radius c bez. c', deren Mittelpunkt jener Punkt ist, auf den sich die V-Fläche reduciert. Die benachbarten G-Strahlensysteme haben die charakteristischen Funktionen:

$$\rho = k\, c\, \omega_v \; \textit{und} \; \rho'' = \frac{1}{k}\, c'\, \omega_u.$$

---

[1]) S. Bianchi pag. 100.

Schliesslich ist noch der Fall möglich, dass $\rho = \rho''$ ist. Dann sind die beiden Flächen G_1 und G''_2 Kugeln, und jedes der beiden G-Strahlensysteme besteht aus den ∞^2 Tangenten an die Meridiane der zugehörigen Kugel. Dieser Fall lässt sich vollständig intergrieren, was wir, da die zu bestimmende Funktion ω von u und v uns im II. Teile wieder begegnet, hier durchführen wollen.

Setzen wir:

$$k\,c = -a \text{ und } \frac{1}{k}\,c' = -b,$$

so ist:

$$\rho = -a\,\omega_v = -b\,\omega_u.$$

Daraus folgt:

$$1.\ a\,b\,d\omega = -\rho\,d\,(au + bv)$$

$$\text{und } 2.\ d\rho = -\omega_{uv}\,d\,(au + bv).$$

Durch Division von 1. und 2. erhalten wir, unter Berücksichtigung von:

$$\omega_{uv} = \sin\omega,$$

$$\rho\,d\rho = ab\sin\omega\,d\omega.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$3.\ \rho = 2\sqrt{ab}\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}$$

Setzen wir diesen Wert von ρ in die Gleichung 1. ein, so erhalten wir zur Bestimmung von ω:

$$4.\ au + bv = -\frac{\sqrt{ab}}{2}\int\frac{d\omega}{\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}.$$

Unter der Voraussetzung, dass ω reell ist, dürfen wir den Constanten a, b und C nur solche Werte beilegen, welche einen reellen Wert der Wurzeln nach sich ziehen. Da es nur auf das Produkt a b ankommt, so können wir, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen, voraussetzen, dass a stets positiv sei, während b einen positiven oder negativen Wert annehmen kann.

Wir wollen zunächst voraussetzen, dass

a und b positiv

sind.

Um das Integral auszuwerten, müssen wir 3 Fälle unterscheiden:

I. Fall.

$$1 < C^2 \leqq \infty;$$

Substituieren wir:

$$C^2 = \frac{1}{\varkappa^2} \text{[1]} \text{ und } \cos\frac{\omega}{2} = \mu,$$

so geht die Grenzbedingung für C über in die folgende:

$$0 \leqq \varkappa < 1,$$

und, da

$$0 \leqq \cos\frac{\omega}{2} \leqq 1$$

ist, so genügt μ der Bedingung:

$$0 \leqq \mu \leqq 1.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$\tau = \frac{au + bv}{\varkappa\sqrt{ab}},$$

so besitzt die zu integrierende Gleichung 4.:

$$\tau = \int \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\varkappa^2\mu^2)}}$$

die Lösung: $\mu = \operatorname{sn}\tau$.[2]

Somit erhalten wir:

$$\cos\omega = 2\operatorname{sn}^2\tau - 1 \text{ und } \sin\omega = 2\operatorname{sn}\tau\cdot\operatorname{cn}\tau,$$

---

[1]) C kann positiv oder negativ sein, für $\varkappa$ ist jedoch stets der positive Wert zu nehmen.

[2]) Hiebei mögen sn x, cn x, dn x die elliptischen Funktionen: sin am $(x, \varkappa)$, cos am $(x, \varkappa)$, Δ am $(x, \varkappa)$ bedeuten.

ferner:

$$\omega_u = -\frac{2a}{\varkappa\sqrt{ab}}\,\mathrm{dn}\,\tau \text{ und } \omega_v = -\frac{2b}{\varkappa\sqrt{ab}}\,\mathrm{dn}\,\tau,$$

so dass ρ den Wert:

$$\rho = \frac{2\sqrt{ab}}{\varkappa}\,\mathrm{dn}\,\tau$$

besitzt.

II. Fall.

$$0 < C^2 < 1.$$

Substituieren wir:

$$C^2 = \varkappa^2 \text{ und } \cos\frac{\omega}{2} = \varkappa\mu,$$

so wird für $\tau = \dfrac{au + bv}{\sqrt{ab}}$ Gleichung 4. übergeführt in:

$$\tau = \int \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\varkappa^2\mu^2)}}.$$

Hiebei genügt $\varkappa$ der Bedingung: $0 < \varkappa < 1$ und, da für μ die Grenzen: $0 \leqq \mu \leqq 1$ gelten, so besitzt ω die Grenzbedingungen:

$$0 \leqq \cos\frac{\omega}{2} \leqq \varkappa,$$

so dass zwischen $\varkappa$ und 1 kein reeller Wert von $\cos\frac{\omega}{2}$ existirt.

Da nun $\mu = \mathrm{sn}\,\tau$ ist, so folgt:

$$\cos\omega = 2\varkappa^2\,\mathrm{sn}^2\,\tau - 1 \qquad \omega_u = -\frac{2a\varkappa}{\sqrt{ab}}\,\mathrm{cn}\,\tau$$

$$\sin\omega = 2\varkappa\,\mathrm{sn}\,\tau \cdot \mathrm{dn}\,\tau \qquad \omega_v = -\frac{2b\varkappa}{\sqrt{ab}}\,\mathrm{cn}\,\tau$$

$$\rho = 2\varkappa\sqrt{ab}\cdot\mathrm{cn}\,\tau.$$

III. Fall.

$C^2 = 1.$

Setzen wir $\tau = \frac{au + bv}{\sqrt{ab}}$, so wird:

$$\tau = -\int \frac{d\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} = \ln \cot\frac{\omega}{4};$$

folglich

$$\tan\frac{\omega}{2} = \frac{1}{\operatorname{sh}\tau} \quad \text{und} \quad \tan\omega = \frac{2\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}^2\tau - 2}.\text{[1]}$$

Folglich:

$$\cos\omega = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2\tau} \qquad \omega_u = -\frac{2a}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\tau}$$

$$\sin\omega = \frac{2\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}^2\tau} \qquad \omega_v = -\frac{2b}{\sqrt{ab}}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\tau}$$

$$\rho = \frac{2\sqrt{ab}}{\operatorname{ch}\tau}.$$

In allen drei Fällen genügt ρ der Differentialgleichung: $\rho_{uv} = \rho\cos\omega$, während $\omega_{uv} = \sin\omega$ ist.

Der vierte Fall, dass C^2 negativ ist, liefert keine reelle Lösung, da die Wurzel unter dem Integralzeichen imaginär wird.

Der Fall:

a positiv und b negativ

unterscheidet sich, wie sich durch kurze Rechnung nachweisen lässt, von dem eben behandelten Falle lediglich dadurch, dass $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{-ab}$ übergeht und der Winkel ω sich mit seinem Supplement vertauscht.

---

[1]) sh x und ch x bedeuten die hyperbolischen Funktionen: sinus hyperbolicus von x u. cosinus hyp. von x.

B. ρ *sei von* X_1, Y_1, Z_1 *linear abhängig.*

Bezeichnen wir mit ξ, η, ζ die Mitte des Brennstrahls:

$$\rho = \alpha X_1 + \beta Y_1 + \gamma Z_1,$$

so ist:

$$2\xi = \xi_1 + \xi_2$$
$$2\eta = \eta_1 + \eta_2$$
$$2\zeta = \zeta_1 + \zeta_2,$$

folglich mit Rücksicht auf die Formeln A. und A'. des § 3 und 6. des § 4:

$$2\xi_u = k(\gamma Y'_2 - \beta Z'_2) \quad\Big|\quad 2\xi_v = \frac{1}{k}(\beta Z_2 - \gamma Y_2)$$

$$2\eta_u = k(\alpha Z'_2 - \gamma X'_2) \quad\Big|\quad 2\eta_v = \frac{1}{k}(\gamma X_2 - \alpha Z_2)$$

$$2\zeta_u = k(\beta X'_2 - \alpha Y'_2) \quad\Big|\quad 2\zeta_v = \frac{1}{k}(\alpha Y_2 - \beta X_2).$$

Daraus folgt durch Integration:

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = \delta,$$

d. h. die Guichard'sche Mittelfläche ist eine Ebene.

Wählen wir z. B.

$$\alpha = 1, \ \beta = 0, \ \gamma = 0,$$

so ist: $\rho = X_1$ und $\xi = \delta$,

d. h. die G-Mittelfläche ist eine zur yz-Ebene parallele Ebene.

Bestimmen wir nun noch mit Hilfe der Transformationen I. und II. des § 5 die beiden Transformierten ρ' und ρ'' von ρ, so brauchen wir nur obigen Wert von ρ nebst den daraus resultierenden Differentialquotienten in die dortigen Gleichungen einzusetzen und zu integrieren.

Wir erhalten dann:

$$\lambda' = c + \Sigma\,\alpha X_2 \quad\Big|\quad \lambda'' = c' + \Sigma\,\alpha X'_2$$

$$\rho' = \rho + k\,c\,\omega_v \quad\Big|\quad \rho'' = \rho + \frac{1}{k}c'\,\omega_u.$$

Nun bedeutet aber die additive Grösse $k\,c\,\omega_v$ geometrisch nichts anderes als dass wir von der unendlichen Anzahl

der zur Fläche G_1 parallelen Flächen diejenige wählen sollen, welche den Abstand c von G_1 besitzt; ebenso erhalten wir das G-Strahlensystem mit der charakteristischen Funktion ρ'', wenn wir diejenige G-Fläche wählen, welche den Abstand c' von G_2 besitzt. Da nun die Constanten c und c' beliebig sind, so sind die transformierten G-Strahlensysteme mit den charakteristischen Funktionen ρ' und ρ'' nichts anderes als die gegebenen G-Strahlensysteme mit der charakteristischen Funktion ρ, d. h.

Die beiden Transformationen $T'(\rho)$ und $T''(\rho)$ reproducieren sich selbst.

§ 7.

Die Biegungen der V-Flächen.

Zu denjenigen Flächen, welche sich nach *Cosserat*[1]) auf ∞^1 fache Weise so biegen lassen, dass ein conjugiertes System bei der Biegung conjugiert bleibt, gehören auch die V-Flächen. Um diese unter Beibehaltung des conjugiert-geodätischen Systems zu biegen, brauchen wir nur der Constanten k alle möglichen Werte beizulegen. Dabei bleibt das Längenelement, sowie das Krümmungsmass ungeändert. Haben wir eine V-Fläche gefunden, z. B. diejenige, für die $k = 1$ ist, so liefert jeder Wert von k eine Biegung derselben. Dass diese Biegungen wieder V-Flächen sind, folgt daraus, dass die für die V-Flächen charakteristischen Gleichungen 1. des § 2 bestehen bleiben. Da die sechs Fundamentalgrössen für die ∞^1 grosse Anzahl der gebogenen V-Flächen bekannt sind, sobald die ursprüngliche V-Fläche gegeben ist, so sind diese gebogenen Flächen principiell

---

[1]) S. Fussnote 3 auf S. 4.

eindeutig bestimmt. Nun hängt aber die explicite Angabe der Coordinaten noch von der Lösung einer Riccati'schen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variabelen ab. Es ist aber nicht gelungen, auf diesem Wege die gebogenen Flächen zu bestimmen[1]). Ebenso wenig hat der Versuch, diejenigen Transformationen der associierten S-Flächen aufzufinden, welche den gebogenen V-Flächen entsprechen müssen, zu einem Resultate geführt.[2])

Wenn wir nun im II. Teile dazu übergehen, unsere Resultate an dem Beispiele der Rotations-V-Flächen zu veranschaulichen, ist es uns, ohne dadurch das Problem zu specialisieren, gestattet, in sämtlichen bisher gefundenen Formeln $k = 1$ zu setzen und erst, wenn es sich um die Biegungsflächen handelt, der Constanten k einen beliebigen Wert beizulegen.

Bemerkenswert ist noch, dass jede nach den Formeln des § 5 transformierte Fläche einer gebogenen V-Fläche eine Biegung der entsprechenden transformierten Fläche der ursprünglichen V-Fläche ist.

Dies folgt aus dem von *Peterson* gefundenen und von *Stäckel*[3]) angeführten Satze:

„Sind x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten zweier auf einander abwickelbarer Flächen, so werden die Coordinaten x'_1, y'_1, z'_1 und x'_2, y'_2, z'_2 zweier anderer auf

---

[1]) Bei dem im II. Teile behandelten Beispiele der V-Rotationsflächen ist es mir auf eine andere Weise gelungen, in einem speciellen Falle diese Biegungen zu ermitteln.

[2]) Da für diese den gebogenen V-Flächen associierten S-Flächen das Quadrat des Längenelements den Wert hat:

$$ds^2 = R^2 \left(k^2 du^2 + 2 \cos \omega \, du \, dv + \frac{1}{k_2} dv^2\right),$$

so ist die einer gebogenen V-Fläche associierte S-Fläche keine Biegung derjenigen S-Fläche, welche der ursprünglichen V-Fläche associiert ist.

[3]) Siehe Fussnote 1 auf Seite 32.

einander abwickelbarer Flächen gefunden, wenn wir setzen:

$$x'_{1u} = Px_{1u} \qquad x'_{2u} = Px_{2u}$$
$$x'_{1v} = Qx_{1v} \qquad x'_{2v} = Qx_{2v},$$

wo P und Q den Gleichungen 5. des § 5 genügen. Sind demnach x_i, y_i, z_i (1, 2, 3 . . .) die Coordinaten einer unendlichen Anzahl von auf einander abwickelbaren V-Flächen, so werden die Coordinaten $x_i^{(\varkappa)}$, $y_i^{(\varkappa)}$, $z_i^{(\varkappa)}$ einer unendlichen Anzahl neuer auf einander abwickelbaren V-Flächen gefunden aus den Gleichungen:

$$x_{iu}^{(\varkappa)} = P^{(\varkappa)} x_{iu},$$
$$x_{iv}^{(\varkappa)} = Q^{(\varkappa)} x_{iv}.$$

Durch jedes Paar von Grössen $P^{(\varkappa)}$ $Q^{(\varkappa)}$ ($\varkappa = 1, 2, 3 \ldots$), welches den Gleichungen 5. des § 5 genügt, sind ∞^1 auf einander abwickelbare V-Flächen einander zugeordnet, von denen jede Fläche $V_i^{(k)}$ mit den Coordinaten $x_i^{(\varkappa)}$, $y_i^{(\varkappa)}$, $z_i^{(\varkappa)}$ die $\varkappa^{te}$ Transformierte der Fläche $V_i^{(0)}$ mit den Coordinaten $x_i^{(0)}$, $y_i^{(0)}$, $z_i^{(0)}$ und die i^{te} Biegung der Fläche $V_0^{(\varkappa)}$ mit den Coordinaten $x_0^{(\varkappa)}$, $y_0^{(\varkappa)}$, $z_0^{(\varkappa)}$ ist.

Die $\varkappa^{te}$ Transformierte der i^{ten} Biegung ist die i^{te} Biegung der $\varkappa^{ten}$ Transformierten.

II. Teil.

Die Rotationsflächen V_R.

§ 1.

Bestimmung sämtlicher Flächen V_R.

Wir wollen in diesem II. Teile ein zur Veranschaulichung obiger Betrachtungen geeignetes, von *Voss* nur ganz kurz angedeutetes Beispiel behandeln, nämlich diejenigen V-Flächen, welche zugleich Rotationsflächen sind und deshalb als „Flächen V_R“ bezeichnet werden mögen.

Die Coordinaten x, y, z einer jeden Rotationsfläche lassen sich in der Form:

$$x = r \cos \varphi; \; y = r \sin \varphi; \; z = f(r)$$

darstellen, wo r der Radius des durch den Punkt x, y, z gehenden Parallelkreises und φ die geographische Länge des Meridians ist.

Soll nun obige Fläche eine V-Fläche sein, so müssen wir r und φ als Funktionen der conjugierten geodätischen Parametercurven u und v auffassen und mit Hilfe der im § 1 des I. Teils angegebenen Definitionen die drei Gleichungen 1. des § 2, denen jede V-Fläche genügen muss, und die drei Gleichungen 2. des § 2, welche die Existenzbedingungen der Fläche darstellen, bilden und, wenn es uns gelingt, aus diesen sechs Gleichungen r und φ als Funktionen von u und v und f als Funktion

von r zu ermitteln, so liefert uns f die Flächen V_R, und r und φ geben die Lage der Meridiane und Breitekreise zu dem conjugiert-geodätischen Systeme u, v an.

Diese sechs Gleichungen lauten nun:

$$D' = -\frac{f'' r_u r_v + r \cdot f' \varphi_u \varphi_v}{\sqrt{1 + f'^2}} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{r(1+f'^2)(r_{uu}\varphi_u - \varphi_{uu} r_u) + (r f' f'' - 2\,\overline{1+f'^2})\, r_u^2 \varphi_u - r^2 \varphi_u^3}{r(r_v \varphi_u - r_u \varphi_v)(1 + f'^2)} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{r(1+f'^2)(r_{vv}\varphi_v - \varphi_{vv} r_u) + (r f' f'' - 2\,\overline{1+f'^2})\, r_v^2 \varphi_v - r \varphi^2{}_v^3}{r(r_u \varphi_v - r_v \varphi_u)(1 + f'^2)} = 0$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{D\sqrt{G}}{\sqrt{\sigma}}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{\sqrt{f'^2(1+f'^2)\varphi_u^2 + f''^2 r_u^2}}{1+f'^2}\right) = 0$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{D''\sqrt{E}}{\sqrt{\sigma}}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{\sqrt{f'^2(1+f'^2)\varphi_v^2 + f''^2 r^2_v}}{1+f'^2}\right) = 0.$$

Die sechste Gleichung: $DD'' = K\sigma$, die sich, wie im § 2 gezeigt wurde, auf $\omega_{uv} = \sin\omega$ reduciert, ist, wie man nach Berechnung der Fundamentalgrössen leicht verificieren kann, eine Folge der übrigen Gleichungen, kann also hier fortgelassen werden.

Bei der Integration der vierten und fünften Gleichung darf nach den Bemerkungen des § 7:

$$\frac{D\sqrt{G}}{\sqrt{\sigma}} = \frac{D''\sqrt{E}}{\sqrt{\sigma}} = -1$$

gesetzt werden.

Damit die zweite und dritte Gleichung erfüllt wird, müssen die Zähler verschwinden. Setzen wir in der zweiten Gleichung:

$$\left(\frac{r_u}{\varphi_u}\right)^2 = \zeta, \text{ so ist:}$$

$$r_{uu}\varphi_u - \varphi_{uu} r_u = \frac{\varphi_u^3}{2 r_u}\zeta_u.$$

Multiplizieren wir dann die Gleichung mit $\frac{2 r_u}{r^5 \varphi_u^3}$, so erhalten wir:

$$\frac{1 + f'^2}{r^4}\zeta_u + \frac{2 r f' f'' - 4(1 + f'^2)}{r^5} r_u \zeta - \frac{2}{r^3} r_u = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$\frac{1 + f'^2}{r^4}\zeta + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{V^2} \text{ oder: } \frac{1 + f'^2}{r^4}\left(\frac{r_u}{\varphi_u}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{V^2}.$$

Ebenso gelangen wir durch Integration der dritten Gleichung zu der folgenden:

$$\frac{1 + f'^2}{r^4}\left(\frac{r_v}{\varphi_v}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{U^2}.$$

Hiebei sind U und V beliebige Funktionen von u, bez. v.

Die obigen fünf Gleichungen gehen also in die folgenden über:

1. $f'' r_u r_v + r f' \varphi_u \varphi_v = 0$
2. $(1 + f'^2) V^2 r_u^2 - r^2 (r^2 - V^2) \varphi_u^2 = 0$
3. $(1 + f'^2) U^2 r_v^2 - r^2 (r^2 - U^2) \varphi_v^2 = 0$
4. $f''^2 r_u^2 + f'^2 (1 + f'^2) \varphi_u^2 = (1 + f'^2)^2$
5. $f''^2 r_v^2 + f'^2 (1 + f'^2) \varphi_v^2 = (1 + f'^2)^2.$

Bestimmen wir aus den Gleichungen 2.—5. φ_u^2, φ_v^2, r_u^2, r_v^2 und setzen diese Werte in die aus 1. folgende Gleichung $\frac{r_u^2 r_v^2}{\varphi_u^2 \varphi_v^2} = \frac{r^2 f'^2}{f''^2}$ ein, so erhalten wir:

$$6. \quad \frac{(r^2 - U^2)(r^2 - V^2)}{U^2 V^2} = \frac{f'^2 (1 + f'^2)}{r^2 f''^2}.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von f und kann, da f als Funktion von r u und v nicht explicite

enthalten darf, nur dann befriedigt sein, wenn U und V constant sind. Setzen wir also:

$$U = a \text{ und } V = b,$$

so wird f durch zweimalige Integration gefunden aus der Gleichung:

$$\text{A.} \quad \frac{f''}{f'(1 + f'^2)} = \frac{ab}{r\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}}.$$

r und φ erhalten wir dann durch je eine weitere Quadratur aus den Gleichungen:

$$\text{B.} \quad \begin{array}{l|l} r_u = \dfrac{1 + f'^2}{r f''} \cdot a & \varphi_u = \dfrac{\sqrt{1 + f'^2}}{r f'} \sqrt{r^2 - a^2} \\ r_v = \dfrac{1 + f'^2}{r f''} \cdot b & \varphi_v = -\dfrac{\sqrt{1 + f'^2}}{r f'} \sqrt{r^2 - b^2}. \end{array}$$ [1]

Hiebei setzen wir fest, dass a grösser als b ist, wozu wir, ohne das Problem einzuschränken, berechtigt sind, da sich sonst lediglich u mit v vertauschen würde. Ferner erkennen wir, dass wir, um reelle Lösungen — und nur solche sollen hier behandelt werden — zu erhalten, r grösser als a nehmen müssen. Es gilt also die Ungleichung:

$$\text{C.} \quad b \leqq a \leqq r \leqq \infty.$$ [2]

Wir wollen zunächst voraussetzen, dass a und b beide positiv sind.

Setzen wir dann zur Abkürzung:

$$\lambda = \frac{a - b}{2\sqrt{ab}},$$

[1]) Das Vorzeichen von φ_v rührt daher, dass die Gleichung 1. erfüllt sein muss. Wählen wir in der Gleichung A. für die Wurzel das positive Vorzeichen, so erhält φ_v das negative.

[2]) Zu diesem Resultat gelangte bereits Voss in seiner bereits genannten Abhandlung.

so wird durch die Substitution:

$$7. \quad t = 2\lambda^2 + 1 - \frac{ab}{r^2}$$

die Differentialgleichung A. in die folgende:

$$\frac{f'' \, dr}{f'(1 + f'^2)} = \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 4\lambda^2(\lambda^2 - 1)}}$$

übergeführt. Die erste Integration liefert:

$$f' = \frac{c}{\sqrt{t - c^2 - \sqrt{t^2 - 4\lambda^2(\lambda^2 + 1)}}}.$$

Bilden wir f'' und setzen die Werte von f' und f'', sowie den aus 7. sich ergebenden Wert von r in die zur Bestimmung von r dienenden Gleichungen B. ein, so erhalten wir zur Ermittelung von t:

$$au + bv = \frac{c\sqrt{ab}}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{2\lambda^2 + 1 - t}\,\sqrt{t^2 - 4\lambda^2(\lambda^2 + 1)}\,\sqrt{t - c^2 - \sqrt{t^2 - 4\lambda^2(\lambda^2 +}}}$$

Setzen wir noch:

$$\sqrt{t^2 - 4\lambda^2(\lambda^2 + 1)} = t - \frac{2\lambda^2(\lambda^2 + 1)}{\cos^2\frac{\omega}{2} + \lambda^2}, \text{ so dass}$$

$$8. \quad t = \frac{\cos^4\frac{\omega}{2} + 2\lambda^2\cos^2\frac{\omega}{2} + \lambda^2(2\lambda^2 + 1)^2}{\cos^2\frac{\omega}{2} + \lambda^2} \text{ wird,}$$

so gilt für ω die Gleichung:

$$au + bv = -\frac{\sqrt{ab}}{2} \int \frac{d\omega}{\sqrt{\frac{2\lambda^2(\lambda^2 + 1) - c^2\lambda^2}{c^2} - \cos^2\frac{\omega}{2}}},$$

Führen wir noch statt der Constanten c eine andere Constante C ein durch die Substitution

$$C^2 = \frac{2\lambda^2(\lambda^2 + 1) - c^2\lambda^2}{c^2},$$

so ist dieses Integral identisch mit dem im § 6 des I. Teils behandelten; es kann infolgedessen ebenso wie dort ω als Funktion von u und v ermittelt werden, was uns zu drei den verschiedenen Werten von C entsprechenden Typen von Flächen V_R führt.

Es handelt sich nun noch darum, die übrigen zur Bestimmung der V-Fläche erforderlichen Funktionen aufzusuchen.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$T = \sqrt{\cos^2\frac{\omega}{2} + \lambda^2} \quad \text{und} \quad \Lambda = \sqrt{C^2 + \lambda^2},$$

so ist, da $f' = \frac{T}{\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}$,

$$= 2\sqrt{ab}\,\frac{T}{\sin\omega} \quad \text{und} \quad f = -\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int\frac{(a\cos\omega + b)(b\cos\omega + a)}{\sin^2\omega\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\,d\omega.$$ [1]

Da ferner $d\omega = -2\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{a\,du + b\,dv}{\sqrt{ab}}$ ist,

so wird: $$\varphi = \Lambda\left(\frac{au - bv}{\sqrt{ab}} + \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2 + 1}}{2}\int\frac{d\omega}{T^2\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\right).$$

Fläche V_R

Diese Formeln bestimmen, wenn für ω die im § 6 des I. Teils gefundenen Werte eingesetzt werden, die drei Typen der Flächen V_R.

Die Fundamentalgrössen 1. Ordnung sind:

$$E = \frac{4\,a\,\Lambda^2\,(a\cos\omega + b)^2}{b\sin^4\omega},$$

$$F = \frac{4\,\Lambda^2\,(a\cos\omega + b)\,(b\cos\omega + a)}{\sin^4\omega}\cdot\cos\omega$$

---

[1]) Die Ausführung dieses Integrals, sowie noch einiger weiteren Integrale unterlassen wir, da wir derselben im Folgenden nicht bedürfen.

$$G = \frac{4\,b\,\Lambda^2 (b \cos\omega + a)^2}{a \sin^4 \omega}.$$

Da nun die Normale die Richtungscosinus:

$$X = \frac{T}{\Lambda} \cos\varphi;\; Y = \frac{T}{\Lambda} \sin\varphi;\; Z = -\frac{\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{\Lambda}$$

besitzt, so werden die Fundamentalgrössen 2. Ordnung:

$$D = -\frac{2\,a\,\Lambda (a \cos\omega + b)}{\sqrt{ab}\,\sin\omega}$$

$$D' = 0$$

$$D'' = -\frac{2\,b\,\Lambda (b \cos\omega + a)}{\sqrt{ab}\,\sin\omega}.$$

Was nun den Giltigkeitsbereich von ω anlangt, so muss infolge der Ungleichung C die Grenzbedingung:

$$9.\quad \frac{a - b}{2\,a} \leqq \cos^2\frac{\omega}{2} \leqq 1$$

bestehen; im Falle II ist die obere Grenze sogar $\varkappa^2 < 1$.

Um ferner die Vorzeichen von $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ zu bestimmen, beachten wir, dass die Funktionen:

$$M_u = \sqrt{E} \cos^2\frac{\omega}{2} \quad \text{und} \quad M_v = \sqrt{G} \cos^2\frac{\omega}{2}$$

die Differentialgleichung:

$$M_{uv} \sin\omega + M_u\,\omega_v + M_v\,\omega_u = 0$$

befriedigen müssen. Dies ist aber, wie die Ausführung der Rechnung zeigt, nur dann der Fall, wenn $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ gleiches Vorzeichen besitzen. Daraus folgt, dass das Krümmungsmass: $K = \frac{1}{\sqrt{EG}}$ positiv ist. Also sind alle Flächen V_R elliptisch gekrümmt.

Die Fälle, dass a oder b oder beide negativ sind, lassen sich ebenso wie im § 6 leicht auf den hier behandelten Fall zurückführen.

Ehe wir nun dazu übergehen, die drei Typen der Flächen V_R näher zu betrachten, wollen wir die associierten S-Flächen ermitteln, was der Zweck des nächsten Paragraphen sein möge.

§ 2.

Die associierten S-Flächen.

Wenden wir die Formeln *B.* des § 2 des I. Teils an, so erhalten die Coordinaten der associierten S-Flächen folgende Werte:

$$\left.\begin{matrix}\xi \\ \eta\end{matrix}\right\} = R \frac{\sin\omega}{2\Lambda T} \begin{matrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{matrix} \begin{matrix}+ \\ -\end{matrix} R \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{\Lambda^2 T} \begin{matrix}\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{matrix}$$

$$\zeta = \frac{R}{2\Lambda}\int\frac{T^2\,d\omega}{\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}} + R\,\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}}{\Lambda}\cdot\frac{au-bv}{\sqrt{ab}}.$$

Dass diese Flächen Schraubenflächen sind, lässt sich leicht auf folgende Weise zeigen.

Setzen wir:

$$R\frac{\sin\omega}{2\Lambda T} = \rho\cos\psi \text{ und } R\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{\Lambda^2 T} = \rho\sin\psi,$$

$$\text{so ist: } \tan\psi = \frac{2\lambda\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{\Lambda\sin\omega} \text{ und } \rho = \frac{RT}{\Lambda^2}.$$

Führen wir noch zur Abkürzung

$$\chi = \varphi - \psi$$

ein, so ist:

Associierte S-Flächen

$$\left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}\xi \\ \eta\end{matrix}\right\} = \frac{R\,T}{\Lambda^2}\begin{matrix}\cos\chi \\ \sin\chi\end{matrix} \\
&\zeta = \frac{R\Lambda}{8}\int\frac{\sin^2\omega\, d\omega}{T^2\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}} + R\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}}{\Lambda^2}\chi; \\
&\text{hiebei ist:} \\
&T = \sqrt{\Lambda^2\sin^2\frac{\omega}{2} + (C^2-1)\lambda^2} \text{ und} \\
&\chi = \Lambda\left(\frac{au - bv}{\sqrt{ab}} + \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+1}}{2}\int\frac{\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{T^2}\,d\omega\right).
\end{aligned}\right.$$

Dies ist die bekannte Form der Coordinaten einer Schraubenfläche.

§ 3.

Die Gestalt der Flächen V_R und der associierten S-Flächen, sowie der Verlauf der geodätischen Systeme, bez. der Haupttangentencurven auf denselben.

Denken wir uns die Meridiancurve der Flächen V_R bezogen auf die Variablen r und z, die von dem Parameter ω abhängen, so ist:

$$r = 2\sqrt{ab}\,\frac{T}{\sin\omega};\quad z = -\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int\frac{(a\cos\omega + b)(b\cos\omega + a)}{\sin^2\omega\,\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}\,d\omega.$$

Da $\frac{\partial r}{\partial\omega} = -\frac{(a\cos\omega + b)(b\cos\omega + a)}{2\sqrt{ab}\,T\sin^2\omega}$ ist, so haben die Differentialquotienten von r nach z die Werte:

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{T};\quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{\Lambda^2\sqrt{ab}\,\sin^3\omega}{2\,T^3(a\cos\omega + b)(b\cos\omega + a)}.$$

Ebenso gilt für das Meridianprofil der associierten Schraubenflächen S, das wir auf die Variablen ρ und ζ beziehen:

$$\rho = \frac{R T}{\Lambda^2}; \ \zeta = -\frac{R\Lambda}{8}\int \frac{\sin^2 \omega}{T^2 \sqrt{C^2 - \cos^2 \frac{\omega}{2}}} d\omega. \text{ [1]}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} = \frac{R \sin \omega}{4 T},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} = -\frac{2 T \sqrt{C^2 - \cos^2 \frac{\omega}{2}}}{\Lambda \sin \omega}; \ \frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta^2} = \frac{16 \, T \Psi}{R \, \Lambda^2 \sin^4 \omega},$$

wo $\Psi = [\Lambda^4 - \lambda^2 (\lambda^2 + 1)] \sin^4 \frac{\omega}{2} - \lambda^2 (C^2 - 1)^2 \cos \omega$ ist.

Um nun die drei Flächentypen zu unterscheiden, setzen wir unter Berücksichtigung der Ungleichung C. des § 1 die im § 6 des I. Teils für C und ω angegebenen Werte ein.

Fall I.

$$C^2 = \frac{1}{\varkappa^2} \quad (0 \leqq \varkappa < 1);$$

$$\cos \frac{\omega}{2} = \operatorname{sn} \tau \left(\frac{a - b}{2a} \leqq \operatorname{sn}^2 \tau \leqq 1 \right); \ \tau = \frac{au + bv}{\sqrt{ab}};$$

$$\Lambda = \frac{\sqrt{1 + \varkappa^2 \lambda}}{\varkappa}; \ T = \sqrt{\operatorname{sn}^2 \tau + \lambda^2}; \ r = \sqrt{ab} \frac{\sqrt{\operatorname{sn}^2 \tau + \lambda^2}}{\operatorname{sn} \tau \, . \operatorname{cn} \tau}.$$

---

[1]) Eigentlich sollten z und ζ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, so dass der positiven z-Axe die negative ζ-Axe entspricht; da aber die Flächen zur xy- bez. $\xi\eta$-Ebene symmetrisch liegen, ändern wir aus praktischen Gründen das Vorzeichen von ζ.

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\mathrm{dn}\,\tau}{\varkappa\sqrt{\mathrm{sn}^2\tau + \lambda^2}}; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{(1+\varkappa^2\lambda^2)\,\mathrm{sn}^3\tau\,.\,\mathrm{cn}^3\tau}{\varkappa^2\sqrt{ab}\left(\sqrt{\mathrm{sn}^2\tau+\lambda^2}\right)^3\left(\mathrm{sn}^2\tau - \frac{a-b}{2a}\right)\left(\mathrm{sn}^2 + \frac{a-}{2}\right.}$$

Somit wächst r von a bis ∞, $\frac{\partial r}{\partial z}$ ist stets positiv, $\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$ stets negativ. Für negatives z erhalten wir einen symmetrischen Curvenzweig.

Die Rotationsfläche entsteht dann durch Rotation dieser Curve um die z-Axe.

Für die S-Fläche gilt:

$$T = \frac{\sqrt{\mathrm{cn}^2\tau + \lambda^2\,\mathrm{dn}^2\tau}}{\varkappa}; \quad \Psi = \frac{\mathrm{cn}^4\tau + \lambda^2\mathrm{dn}^2\tau\,(\mathrm{cn}^2\tau - \varkappa'^2\,\mathrm{sn}^2\tau)}{\varkappa^4};$$

$$\rho = \frac{R\varkappa\sqrt{\mathrm{cn}^2\tau + \lambda^2\,\mathrm{dn}^2\tau}}{1+\varkappa^2\lambda^2}; \quad \frac{\partial\rho}{\partial\zeta} = -\frac{\mathrm{dn}\,\tau\sqrt{\mathrm{cn}^2\tau + \lambda^2\,\mathrm{dn}^2\tau}}{\varkappa\sqrt{1+\varkappa^2\lambda^2}\,\mathrm{sn}\,\tau\,.\,\mathrm{cn}\,\tau};$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta^2} = \frac{\sqrt{\mathrm{cn}^2\tau + \lambda^2\,\mathrm{dn}^2}\,[\mathrm{cn}^4\tau + \lambda^2\,\mathrm{dn}^2\tau\,(\mathrm{cn}^2\tau - \varkappa'^2\,\mathrm{sn}^2\tau)]}{R\,\varkappa^3\,(1+\varkappa^2\lambda^2)\,\mathrm{sn}^4\tau\,\mathrm{cn}^4\tau}.$$

Mit wachsendem r nimmt ρ ab, $\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}$ ist stets negativ, $\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi^2}$ ist anfangs positiv, verschwindet bei $\mathrm{sn}^2\tau = \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\sqrt{\lambda^2+1}+\lambda\varkappa'^2}$ wo demnach die Curve einen Wendepunkt besitzt, und wird dann negativ. Für $\mathrm{sn}^2\tau = 1$, wo ρ ein Minimum besitzt, steht die Tangente der Curve senkrecht zur ζ-Axe. Da dieser Punkt im Endlichen liegt, setzt sich infolge der Periodicität der elliptischen Funktionen die Curve periodisch fort, so dass hier eine Spitze entsteht.

Die Schraubenfläche erhält man dann durch Rotation mit gleichzeitiger Schraubung dieses Meridianprofils um die ζ-Axe; sie besitzt demnach für $\mathrm{sn}^2\tau = 1$ eine Rückkehrcurve.

Fall II.

$$C^2 = \varkappa^2 \, (0 < \varkappa < 1);$$

$$\cos\frac{\omega}{2} = \varkappa \operatorname{sn}\tau \left(\frac{a-b}{2a\varkappa^2} \leqq \operatorname{sn}^2\tau \leqq 1\right); \quad \tau = \frac{au+bv}{\varkappa\sqrt{ab}};$$

$$\Lambda = \sqrt{\lambda^2+\varkappa^2}; \; T = \sqrt{\varkappa^2 \operatorname{sn}\tau^2 + \lambda^2}; \; r = \sqrt{ab}\,\frac{\sqrt{\varkappa^2\operatorname{sn}^2\tau+\lambda^2}}{\varkappa \operatorname{sn}\tau \,.\, \operatorname{dn}\tau};$$

$$= \frac{\varkappa \operatorname{cn}\tau}{\sqrt{\varkappa^2\operatorname{sn}^2\tau+\lambda^2}}; \; \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{(\lambda^2+\varkappa^2)\operatorname{sn}^3\tau \,.\, \operatorname{dn}^3\tau}{\varkappa\sqrt{ab}\,(\sqrt{\varkappa^2\operatorname{sn}^2\tau+\lambda^2})^3\left(\operatorname{sn}^2\tau - \frac{a-b}{2a\varkappa^2}\right)\left(\operatorname{sn}^2\tau + \frac{a-b}{2b\varkappa^2}\right)}$$

r wächst bis zu einem endlichen Maximum, wo die Tangente der Curve parallel der z-Axe ist; $\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$ ist stets negativ. Die Curve verläuft periodisch.

Ferner ist:

$$T = \varkappa\sqrt{\operatorname{dn}^2\tau + \lambda^2\operatorname{cn}^2\tau}; \; \Psi = \varkappa^4[\operatorname{dn}^4\tau + \lambda^2\operatorname{cn}^2\tau(\operatorname{dn}^2\tau + \varkappa'^2\operatorname{sn}^2\tau)];$$

$$\rho = \frac{R\varkappa\sqrt{\operatorname{dn}^2\tau+\lambda^2\operatorname{cn}^2\tau}}{\lambda^2+\varkappa^2}; \; \frac{\partial\rho}{\partial\zeta} = -\frac{\varkappa \operatorname{cn}\tau\sqrt{\operatorname{dn}^2\tau+\lambda^2\operatorname{cn}^2\tau}}{\sqrt{\lambda^2+\varkappa^2}\,.\,\operatorname{sn}\tau\,.\,\operatorname{dn}\tau}.$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta^2} = \frac{\varkappa\sqrt{\operatorname{dn}^2\tau+\lambda^2\operatorname{cn}^2\tau}\,[\operatorname{dn}^4\tau+\lambda^2\operatorname{cn}^2\tau(\operatorname{dn}^2\tau+\varkappa'^2\operatorname{sn}^2\tau)]}{R(\lambda^2+\varkappa^2)\operatorname{sn}^4\tau\,.\,\operatorname{dn}^4\tau}.$$

Für das Minimum von ρ, das bei $\operatorname{sn}^2\tau = 1$ stattfindet, besitzt die Curve eine der ζ-Axe parallele Tangente. Ein Wendepunkt ist nicht vorhanden, da $\frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta^2}$ stets positiv ist. Die Curve kehrt periodisch wieder.

Fall III.

$$C = 1;$$

$$\cos\frac{\omega}{2} = \frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau}\left(\frac{2a}{a+b} \leqq \operatorname{ch}^2\tau \leqq \infty\right); \quad \tau = \frac{au+bv}{\sqrt{ab}};$$

$$\Lambda = \sqrt{\lambda^2 + 1}\,; \quad T = \frac{\sqrt{(\lambda^2+1)\,ch^2\tau - 1}}{ch\,\tau}\,; \quad r = \sqrt{ab}\,\frac{ch\tau\sqrt{(\lambda^2+1)\,ch^2\tau - 1}}{sh\,\tau}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2+1)ch^2\tau - 1}}\,; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{sh^3\tau\,.\,ch^3\tau}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{(\lambda+1)ch\tau - 1}\right)^3\left(ch^2\tau - \frac{2a}{a+b}\right)\left(ch^2\tau - \frac{2b}{a+b}\right)}$$

r wächst unter positivem $\frac{\partial r}{\partial z}$ von a bis ∞; $\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$ ist stets negativ. Die Curve verläuft ins Unendliche.

Ferner ist:

$$\mathit{T} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}}{ch\,\tau}\,; \quad \Psi = \frac{\lambda^2 + 1}{ch^4\,\tau}\,; \quad \rho = \frac{R}{ch\,\tau\,\sqrt{\lambda^2 + 1}}\,;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} = -\frac{1}{sh\,\tau}\,; \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta^2} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}\,ch^3\,\tau}{R\,sh^4\,\tau}.$$

ρ nimmt ab bis zum Worte o; $\frac{\partial \rho}{\partial \zeta}$ ist stets negativ und wird für $ch^2\,\tau = \infty$ gleich Null; $\frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta^2}$ ist positiv. Die ζ-Axe ist Asymptote der Curve.

In der angefügten Tafel (Fig. 2—7) sind die Meridiancurven der Flächen V_R, bezogen auf die Coordinatenaxen z und r, sowie die Meridianprofile der S-Flächen, bezogen auf die Coordinatenaxen ζ und ρ, dargestellt.

Sämtliche Curven besitzen im Punkte A bez. *A* zwei von einander verschiedene, zur r bez. ρ-Axe symmetrische Tangenten.

Bei den Flächen V_R besitzt die Meridiancurve in A die Coordinaten: $z = 0$, $r = a$; dann nimmt r zu und zwar in den Fällen I und III bis $r = \infty$ und im Falle II bis zu endlichen Maximum. Die Curve wendet in ihrem ganzen Verlaufe ihre concave Seite der z-Axe zu; ihre Richtung nähert sich dabei einer festen Grenzlage B, wo sie im Falle I mit der z-Axe einen spitzen Winkel bildet, im Falle III zu derselben parallel ist, ohne dass

im Endlichen eine Asymptote vorhanden ist; im Falle II setzt sich die Curve, deren Tangente in dem endlichen Punkte B zur z-Axe parallel ist, periodisch fort.

Bei den S-Flächen dagegen besitzt das Meridianprofil in *A* ein Maximum von ρ; dann nimmt ρ ab und erreicht in *B* sein Minimum, das im Falle III gleich Null ist. Im Falle I wendet die Curve anfangs ihre convexe Seite der ζ-Axe zu, besitzt in Δ einen Wendepunkt, von wo aus sie dann concav gegen die ζ-Axe verläuft, während sie dagegen in den Fällen II und III in ihrem ganzen Verlaufe convex gegen die ζ-Axe gekrümmt ist. Im Punkte *B* bildet ferner das Meridianprofil im Falle I eine Spitze, deren Tangente senkrecht zur ζ-Axe steht, so dass hier die S-Fläche eine Rückkehrcurve besitzt; im Falle II ist die Tangente der ζ-Axe parallel und im Falle III berührt sie dieselbe. Da in den Fällen I und II *B* im Endlichen liegt, setzt sich die Curve periodisch fort, während sie im Falle III sich der ζ-Axe asymptotisch nähert.

Um nun den Verlauf des conjugiert-geodätischen Systems der Flächen V_R, bez. der Haupttangentencurven der associierten S-Flächen zu untersuchen, gehen wir von den Differentialgleichungen der Curven r und φ, bez. ρ und χ aus und bestimmen[1]) die Winkel, welche diese Curven mit den Parameterlinien u und v einschliessen.

Setzen wir (nach *Bianchi*) als die positive Seite der Tangentialebene in einem beliebigen Punkte diejenige fest, auf welcher die Drehung der positiven Richtung der Tangente der Curve v in die Lage der Tangente der Curve u um den zwischen o und π gelegenen Winkel ω in der Richtung des Uhrzeigers erfolgt, und bezeichnen mit $\sphericalangle$ (v C) den zwischen o und 2π gelegenen Winkel, um den sich die positive Richtung der Tangente

[1]) S. Bianchi, Differentialgeometrie pag. 64 und 65.

der Curve v im positiven Sinne in der Tangentialebene drehen muss, um mit der positiven Richtung der Tangente der Curve C zusammenfallen, so sind durch diese Festsetzungen die positiven Richtungen der Tangenten der Curven v und u, ebenso r und φ, sowie ρ und χ bestimmt[1]).

Ermitteln wir zunächst bei den Flächen V_R mit Hilfe der Differentialgleichung der Curven r:

$$a\,du + b\,dv = 0$$

und der Curven φ:

$$(a \cos \omega + b)\,du - (b \cos \omega + a)\,dv = 0$$

die Winkel, welche die Curven r und φ mit den Curven v und u einschliessen, so finden wir, dass, da Curve φ stets auf Curve r senkrecht steht, die Clairaut'sche Beziehung:

$$r \sin(\varphi u) = a \quad \text{und} \quad r \sin(v \varphi) = b$$

in jedem Punkte der Fläche erfüllt ist. In A berührt die Curve u die negative Richtung von r, während die Curve v sich im Winkelraume $(+r, +\varphi)$ befindet und mit der Curve u den stumpfen Winkel ω, für den $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{2a}$ ist, bildet (s. Fig. 8). Mit wachsendem r nimmt dann der Winkel ω ab, die Curven v und u nähern sich der Curve φ (s. Fig. 9) und berühren diese schliesslich in den Fällen I und III im Punkte B, wo r unendlich wird (s. Fig. 10), während im Falle II, wo r dieses Maximum nicht erreicht, ω nur bis zum Werte: $\cos\frac{\omega}{2} = C < 1$ abnimmt.

---

[1]) Da im Folgenden nur die positiven Richtungen der Tangenten der Curven v und u, sowie φ bez. χ auftreten, bezeichnen wir diese der Abkürzung wegen einfach mit Curve v, Curve u etc., während wir jedoch bei der Curve r bez. ρ zwischen der positiven und negativen Richtung unterscheiden müssen.

Bei den S-Flächen dagegen, welche im allgemeinen Schraubenflächen sind, gilt für die Curven ρ zwar die nämliche Differentialgleichung:

$$a\,du + b\,dv = o,$$

für die Curven χ jedoch die folgende:

$$\left[C^2(b - a\cos\omega) + (a - b\cos^2\frac{\omega}{2}\right] du - \left[C^2(a - b\cos\omega) - (a - b)\cos^2\frac{\omega}{2}\right] dv = o.$$

In A ist $\sphericalangle\,(\rho\,\chi)$ stumpf, die Curve v, welche im Winkelraume $(+\rho, +\chi)$ mit der positiven Richtung von ρ einen spitzen Winkel einschliesst, bildet mit der im Winkelraume $(-\rho, +\chi)$ befindlichen Curve u ebenfalls den Winkel ω, für den $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{2a}$ ist (s. Fig. 11). Indem nun gleichzeitig mit ρ der Winkel ω abnimmt, wird $\sphericalangle\,(\rho\,\chi)$ grösser; die Curven v und u entfernen sich von der positiven, bezw. negativen Richtung von ρ und nähern sich der Curve χ. Im Falle I erreicht $\sphericalangle\,(\rho\,u)$ bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{a+b}{2a}$ sein Minimum, wo $\sphericalangle\,(\rho\,v) = \frac{\pi}{2}$ ist (s. Fig. 12). Von da an nimmt mit $\sphericalangle\,(\rho\,v)$ auch $\sphericalangle\,(\rho\,u)$ wieder zu, indem auch $\sphericalangle\,(\rho\,\chi)$ immer grösser wird. Bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{(a+b)\,C^2}{2aC^2 - (a-b)}$, wo das Meridianprofil einen Wendepunkt besitzt, berührt Curve v die Curve χ (s. Fig. 13). Nun wird $\sphericalangle\,(\rho\,\chi)$ wieder kleiner, die Curven v und u befinden sich im Winkelraume $(-\rho, +\chi)$ und nähern sich immer mehr der negativen Richtung von ρ (s. Fig. 14). Schliesslich fallen im Punkte B die beiden Curven v und u zusammen und berühren die negative Richtung von ρ, während der $\sphericalangle\,(\rho\,\chi)$ sein Minimum $\frac{\pi}{2}$ erreicht hat (s. Fig. 15.) Im Falle II, wo ω nur bis zum Werte:

$\cos\frac{\omega}{2} = C < 1$ abnimmt, wird in *B*, je nachdem C^2 kleiner oder grösser als $\frac{a+b}{2\,a}$ ist, die Stellung in Fig. 12 nicht erreicht, oder überschritten; keinesfalls aber kann, da der Winkel ω nicht bis zu dem obigen, dem Wendepunkte entsprechenden Werte abnimmt, die Curve v mit der Curve χ zusammenfallen. Es bleibt also stets die Curve χ im Winkelraume der Curven v und u. Im Falle III halbiert die Curve χ stets den Winkel ω; die Fig. 12 geht infolge dieser Modifikation bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{a+b}{2\,a}$ in die Fig. 12′ über. Der Wendepunkt fällt ins Unendliche für $\cos\omega = 1$, wo die Curve χ gemeinsam mit den Curven v und u die negative Richtung von ρ berührt (s. Fig. 15′).

§ 4.

Der spezielle Fall: b = a.
Die Biegungen der Flächen V_R und die diesen Biegungen associierten S-Flächen in diesem Falle.

In dem speciellen Falle: b = a werden die Coordinaten der Fläche V_R die folgenden:

Flächen V_R für b = a
$$\left\{\begin{aligned} &\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a}{\sin\frac{\omega}{2}} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\, C\,(u-v) \\ &z = -\frac{a}{2}\int \frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}\,d\,\omega. \end{aligned}\right.$$

Die Fundamentalgrössen sind dann:

$$E = G = \frac{a^2\,C^2}{\sin^4\frac{\omega}{2}}\,;\quad F = \frac{a^2\,C^2}{\sin^4\frac{\omega}{2}}\cos\omega\,;$$

$$D = D'' = -\frac{2\,a\,C\cos\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}};\quad D' = 0.$$

Da die Richtungscosinus der Normale die folgenden Werte:

$$\left.\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right\} = \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{C}\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\, C\,(u - v)$$

$$Z = -\frac{\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{C}$$

besitzen, so erhalten wir für die Coordinaten der associierten S-Flächen:

$$\text{Associierte S-Flächen}\left\{\begin{aligned} &\left.\begin{matrix}\xi \\ \eta\end{matrix}\right\} = \frac{R\sin\frac{\omega}{2}}{C}\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\, C\,(u - v) \\ &\zeta = \frac{R}{2\,C}\int\frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\,d\,\omega. \end{aligned}\right.$$

Ihre Fundamentalgrössen sind:

$$E = G = R^2;\ F = R^2\cos\omega.$$
$$D = D'' = 0;\ D' = R\cos\omega.$$

Um die drei Typen von Flächenfamilien zu unterscheiden, haben wir zu setzen:

Fall I.

$$C^2 = \frac{1}{\varkappa^2}\,(0 \leqq \varkappa < 1)$$

$$\cos\frac{\omega}{2} = \operatorname{sn}\frac{u + v}{\varkappa}\left(0 \leqq \operatorname{sn}\frac{u + v}{\varkappa} \leqq 1\right).$$

Fall II.

$$C^2 = \varkappa^2 \; (0 < \varkappa < 1)$$

$$\cos\frac{\omega}{2} = \varkappa \operatorname{sn}(u+v) \; (0 \leqq \operatorname{sn}(u+v) \leqq 1).$$

Fall III.

$$C^2 = 1\,;\; \cos\frac{\omega}{2} = \frac{\operatorname{sh}(u+v)}{\operatorname{ch}(u+v)} \; (1 \leqq \operatorname{ch}(u+v) \leqq \infty).$$

Ehe wir die besonderen Eigenschaften dieser Flächen untersuchen, wollen wir zeigen, dass wir zu ∞^1 Biegder Flächen V_R unter Beibehaltung des conjugiert-geodätischen Systems gelangen, wenn wir von einem Satze *Bour's*[1]) über die Biegung von Rotationsflächen ausgehen. *Bour* zeigte nämlich, dass die Rotationsfläche:

$$\left.\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}\right\} = F(p) \begin{matrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{matrix}$$

$$z = \int \sqrt{1 - F'^2(p)}\, dp,$$

deren Linienelement ds durch die Gleichung:

$$ds^2 = dp^2 + F'^2(p)\, d\psi^2$$

gegeben ist, unter Beibehaltung von ds in ∞^2 Schraubenflächen von der Form:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \alpha\sqrt{F^2(p) - \beta^2} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \frac{\psi - \Phi(p)}{\alpha}$$

$$z = \chi(p) + \beta\psi$$

gebogen werden kann, wo α und β beliebige Constanten sind und $\Phi(p)$ und $\chi(p)$ folgende Werte besitzen:

---

[1]) Bour: Théorie de la déformation des surfaces (Journ. de l'école polyt. Cah. 39 Paris 1897 pag. 82).

$$\Phi(p) - \int \sqrt{F^2(p) - \beta^2 - \alpha^2 F^2(p) F'^2(p)} \, \frac{\beta \, dp}{F(p) \, [F^2(p) - \beta^2]}$$

$$\chi(p) = \int \sqrt{F^2(p) - \beta^2 - \alpha^2 F^2(p) F'^2(p)} \, \frac{dp}{F(p)}.$$

Bestimmen wir nun nach dieser Methode die Coordinaten der Biegungen der Flächen V_R und führen dann wieder die Variablen u und v ein, so bleiben E, F, G selbstverständlich erhalten, aber D' verschwindet nur dann, wenn zwischen α und β die Beziehung:

$$\beta = a \alpha' \quad (\alpha' = \sqrt{1 - \alpha^2})$$

besteht. Dann erhalten auch D und D'' den Faktor k bezw. $\frac{1}{k}$, wo k eine von α abhängige Constante ist.

Wir setzen nun für β obigen Wert ein und verificieren nachträglich, dass die entstehenden Biegungen wieder V-Flächen sind. Um vor allem die Variable p zu ermitteln, setzen wir: $C(u-v) = \psi$ und betrachten die Coordinaten zunächst als Funktionen von ω und ψ, so dass das Quadrat des Linienelements den Wert erhält:

$$ds^2 = \frac{a^2 C^2 \cos^2\frac{\omega}{2}}{4 \sin^4\frac{\omega}{2}\left(C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}\right)} d\omega^2 + \frac{a^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}} d\psi^2.$$

Substituieren wir nun:

$$dp = - \frac{a C \cos\frac{\omega}{2}}{2 \sin^2\frac{\omega}{2} \sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}} d\omega, \text{ so wird:}$$

$$p = \frac{a C \sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{(C^2 - 1) \sin\frac{\omega}{2}}.$$

Es ist dann:

$$F(p) = \frac{a}{\sin\frac{\omega}{2}} \text{ und } F'(p) = \frac{\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{C}.$$

Bilden wir die Funktionen $\Phi(p)$ und $\chi(p)$, so erhalten wir für die Coordinaten der Biegungen der Flächen V_R, welche wir mit Flächen V^* bezeichnen wollen:

$$\text{Flächen } V^* \begin{cases} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \Big\} = \dfrac{a\,\alpha\, T}{\sin\frac{\omega}{2}} \begin{matrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{matrix} \\ z = -\dfrac{a\,\alpha_1}{2} \displaystyle\int \dfrac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}\, T^2 \sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\, d\omega + a\,\alpha\,\alpha'\,\varphi, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$T = \sqrt{1 - \alpha'^2 \sin^2\frac{\omega}{2}}; \quad \alpha_1 = \sqrt{\alpha'^2 C^2 + \alpha^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{\alpha}\left[C(u-v) + \frac{\alpha'\alpha_1}{2} \int \frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{T^2 \sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\, d\omega\right].$$

Betrachten wir ω wieder als Funktion von u und v, so nehmen mit Rücksicht auf:

$$d\omega = -2\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}\; d\,(u+v)$$

die Fundamentalgrössen 1. Ordnung die nämlichen Werte an wie bei den ursprünglichen Flächen V_R, D' verschwindet, D und D'' erhalten einen Faktor k, bezw. $\frac{1}{k}$; es ist nämlich:

$$E = G = \frac{a^2 C^2}{\sin^4\frac{\omega}{2}}; \quad F = \frac{a^2 C^2}{\sin^4\frac{\omega}{2}} \cos\omega;$$

$$D = -\frac{2\,ak\,C\cos\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\,;\; D' = 0;\; D'' = -\frac{2\,a\,C\cos\frac{\omega}{2}}{k\sin\frac{\omega}{2}},$$

wo $k = \frac{\alpha_1 - \alpha' C}{\alpha}$ und $\frac{1}{k} = \frac{\alpha_1 + \alpha' C}{\alpha}$ ist.

Es bleibt also sowohl die Eigenschaft der Parameterlinien u und v, conjugiert zu sein, als auch diejenige, geodätisch zu sein, bestehen (letztere Eigenschaft hängt ja nur von den Fundamentalgrössen 1. Ordnung ab); d. h.

Die Flächen V^*, das sind die Biegungen der Flächen V_R für den Fall: $b = a$, sind wieder V-Flächen, und zwar Schraubenflächen.

Da ferner die Normale die Richtung:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{\alpha_1\cos\frac{\omega}{2}}{C\,T}\begin{matrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{matrix}\begin{matrix}- \\ +\end{matrix}\frac{a\,\alpha'\sin\frac{\omega}{2}\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{C\,T}\begin{matrix}\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{matrix}$$

$$z = -\frac{\alpha\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{C}$$

besitzt, so erhalten wir für die Coordinaten der den Flächen V^* associierten S-Flächen die Werte:

$$\left.\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\right\} = \frac{R\,\alpha^2\alpha_1\sin\frac{\omega}{2}}{C\,T}\begin{matrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{matrix}\begin{matrix}+ \\ -\end{matrix}\frac{R\,\alpha\,\alpha'\cos\frac{\omega}{2}\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{C\,T}\begin{matrix}\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{matrix}$$

$$\zeta = \frac{R\,\alpha}{2\,C}\int\frac{a_1^2 - T^2\sin^2\frac{\omega}{2}}{T^2\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}\,d\omega + \frac{R\,\alpha'\,\alpha_1}{C}\,\varphi.$$

Setzen wir noch:

$$\frac{R\,\alpha^2\alpha_1\sin\frac{\omega}{2}}{C\,T} = \rho\cos\psi \text{ und } \frac{R\,\alpha\,\alpha'\cos\frac{\omega}{2}\sqrt{C^2-\cos^2\frac{\omega}{2}}}{C\,T} = \rho\sin\psi,$$

so dass: $\tan\psi = \dfrac{\alpha' \cos\frac{\omega}{2}\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{\alpha\,\alpha_1 \sin\frac{\omega}{2}}$ und $\rho = \dfrac{R\,\alpha\,T}{C}$ ist,

so brauchen wir nur zur Abkürzung:

$$\chi = \varphi - \psi$$

einzuführen, um die Coordinaten der S-Flächen in folgender Form zu erhalten:

Die den Flächen V* associierten S-Flächen.

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\xi \\ \eta\end{array}\right\} = \dfrac{R\,\alpha\,T}{C}\begin{array}{l}\cos\chi \\ \sin\chi\end{array} \\ \zeta = \dfrac{R\,\alpha}{8\,C}\displaystyle\int \dfrac{\sin^2\omega\,d\omega}{T^2\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}} + \dfrac{R\alpha'\alpha_1}{C}\chi; \end{array}\right.$$

hiebei ist:

$$T = \sqrt{\sin^2\frac{\omega}{2} + \alpha'^2 (C^2 - 1)}$$

und: $$\chi = \frac{1}{a}\left[C(u - v) + \frac{\alpha'\,\alpha_1}{2}\int \frac{\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{T^2}\,d\omega\right].$$

Ihre Fundamentalgrössen sind:

$$E = R^2 k^2;\quad F = R^2 \cos\omega;\quad G = R^2 \frac{1}{k^2};$$
$$D = 0;\qquad D' = R\sin\omega;\quad D'' = 0.$$

Die den Flächen V associierten S-Flächen sind ebenfalls Schraubenflächen, ohne jedoch Biegungen der den ursprünglichen Flächen* V_R *associierten S-Flächen zu sein.*

Um nun diese Flächen näher zu untersuchen, betrachten wir ihr Meridianprofil.

Es gilt für die Flächen V*:

$$r = \frac{a\,\alpha\,T}{\sin\frac{\omega}{2}};\quad z = -\frac{a\,\alpha_1}{2}\int \frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}\,T^2\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\,d\omega.$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{a\,T\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{\alpha_1 \cos\frac{\omega}{2}}; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{\alpha\,T^2 \sin^3\frac{\omega}{2}(\alpha^2 C^2 + \alpha'^2 \cos^4\frac{\omega}{2})}{a\,\alpha_1^2 \cos^4\frac{\omega}{2}}.$$

Ebenso für die S-Flächen:

$$\rho = \frac{R\,\alpha\,T}{C}; \quad \zeta = -\frac{R\,\alpha}{8\,C}\int \frac{\sin^2\omega}{T^2\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}\,d\omega; \text{ [1]}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \zeta} = -\frac{2\,T\sqrt{C^2 - \cos^2\frac{\omega}{2}}}{\sin\omega}; \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta^2} = \frac{16\,C\,T\,\Psi}{R\,\alpha \sin^4\omega},$$

wo $\Psi = [(\alpha'^2 + 1)\,C^2 - \alpha'^2] \cos^4\frac{\omega}{2} - \alpha_1^2\,C^2 \cos\omega$ ist.

Unterscheiden wir wieder die drei Fälle, so erkennen wir, dass die Flächen analog wie die allgemeinen Flächen verlaufen, nur hat das Meridianprofil bei A bez. *A* eine Spitze, deren Tangente senkrecht zur z- bez. ζ-Axe steht, so dass hier die Flächen Rückkehrcurven besitzen. Im Falle I findet der Wendepunkt der S Fläche statt für:

$$\mathrm{sn}^2\tau = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \alpha^2 \varkappa^2}}{\sqrt{\alpha'^2 + \alpha^2 \varkappa^2} + \alpha' \varkappa'^2} \quad \text{(s. Fig. 16—21).}$$

Was nun den Verlauf der geodätischen Linien auf den Flächen V* betrifft, so steht in A Curve φ auf Curve r senkrecht; die Curven v und u berühren die positive, bez. negative Richtung von r (s. Fig. 22). Mit wachsendem r nimmt $\sphericalangle$ (r φ) ab, die Curven v und u entfernen sich von der positiven, bez. negativen Richtung von r und nähern sich der Curve φ, und zwar so, dass die Winkel (+ r, v) und (u, —r) einander gleich sind. Bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}$ erreicht $\sphericalangle$ (r φ) sein Minimum (s. Fig. 23) und nimmt von da an wieder zu, indem die Curven v und u sich der Curve φ immer mehr nähern. In B erreicht $\sphericalangle$ (r φ) wieder seinen grössten Wert, der in den

[1] S. Fussnote auf pag. 51.

Fällen I und III, wo r unendlich wird, $\frac{\pi}{2}$ ist — hier berühren die Curven v und u die Curve φ — (s. Fig. 24), im Falle II dagegen, wo ω nur bis zum Werte: $\cos\frac{\omega}{2} = C < 1$ abnimmt, unter $\frac{\pi}{2}$ sich befindet. Je nachdem C^2 kleiner oder grösser als $\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}$ ist, wird im Falle II die Stellung in Fig. 23 nicht erreicht oder überschritten.

Bei den S-Flächen ist in *A* die gegenseitige Lage der Curven die nämliche wie bei den Flächen V* bei A (s. Fig. 25). Dann nimmt $\sphericalangle(\rho\chi)$ zu, die Curven v und u entfernen sich von der positiven, bez. negativen Richtung von ρ und nähern sich der Curve χ. Im Falle I ist bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha' C}$ $\sphericalangle(\rho\, v) = \frac{\pi}{2}$, während $\sphericalangle(\rho\, u)$ sein Minimum erreicht (s. Fig. 26). Von da an nimmt mit $\sphericalangle(\rho\, v)$ auch $\sphericalangle(\rho\, u)$ wieder zu, indem auch $\sphericalangle(\rho\chi)$ immer grösser wird. Bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{\alpha_1 C}{\alpha_1 C + \alpha_1 (C^2 - 1)}$, wo das Meridianprofil einen Wendepunkt besitzt, berührt Curve v die Curve χ (s. Fig. 27). Jetzt nimmt $\sphericalangle(\rho\chi)$ wieder ab, die Curven v und u befinden sich im Winkelraume (−ρ, χ) und nähern sich immer mehr der negativen Richtung von ρ (s. Fig. 28). Schliesslich fallen in *B* die Curven v und u zusammen und berühren die negative Richtung von ρ, während $\sphericalangle(\rho\chi)$ sein Minimum $\frac{\pi}{2}$ erreicht hat (s. Fig. 29). Im Falle II, wo ω nur bis zum Werte: $\cos\frac{\omega}{2} = C < 1$ abnimmt, wird in *B*, je nachdem C^2 kleiner oder grösser als $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha' C}$ ist, die Stellung in Fig. 26 nicht erreicht, oder überschritten; keinesfalls aber kann, da der Winkel ω nicht bis zu dem obigen, dem

Wendepunkte entsprechenden Werte abnimmt, die Stellung in Fig. 27 erreicht werden, so dass also Curve χ stets im Winkelraume der Curven v und u verbleibt. Im Falle III halbiert Curve χ stets den Winkel ω; die Fig. 26 geht bei $\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{1}{1+\alpha'}$ in die Fig. 26' über; der Wendepunkt fällt in den Punkt B, also ins Unendliche, wo Curve χ gemeinsam mit den Curven v und u die negative Richtung von ρ berührt (s. Fig. 29').

Zum Schlusse wollen wir noch einige besondere Eigenschaften derjenigen V- und S-Flächen hervorheben, für welche $\alpha = 1$ ist. Beide Flächengruppen sind Rotationsflächen; der Meridian halbiert den Winkel der geodätischen Linien, bez. der Haupttangentencurven. Die beiden Curven v und u berühren in A bez. A den Parallelkreis mit entgegengesetzter Tangente, nähern sich dann dem Meridian, den sie im Unendlichen berühren. Die Flächen werden durch die Parameterlinien in lauter Rhomben geteilt (s. Schluss des § 2 I. Teil). Im Falle I rückt für die S-Fläche der Wendepunkt in den Punkt B, wo $\rho = 0$ ist, so dass hier die Fläche einen Knotenpunkt besitzt (s. Fig. 30).

Setzen wir die den 3 Typen zugehörigen Werte von C und ω in die Coordinaten der Flächen V* und der associierten S-Flächen ein, so erkennen wir, dass: *für den Fall: $\alpha = 1$ die S-Flächen die bereits bekannten drei Typen von pseudosphärischen Rotationsflächen sind.* Wir erhalten nämlich ihre Meridiane in derjenigen Form, in welcher sie *Bianchi* (pag. 192 und 193) angegeben hat.

C. J. Becker's Univ.-Buchdruckerei — Würzburg.

Druckfehlerverzeichnis.

Auf Seite 8 Zeile 5 von unten lies statt F_u F_v

„	„	12	„	5	„	oben	„	„	$\sin\frac{\omega^2}{2}$	$\sin\frac{{}^2\omega}{2}$
„	„	43	„	7	„	oben	„	„	$r\,\varphi^2{}_v{}^3$	$r^2\,\varphi_v{}^3$
„	„	43	„	9	„	oben	„	„	$r^2{}_v$	$r_v{}^2$
„	„	44	„	6	„	oben	„	„	$\left(\frac{r_u}{\varphi_u}\right)$	$\left(\frac{r_u}{\varphi_u}\right)^2$
„	„	51	„	5	„	unten	„	„	$\varkappa^2\lambda$	$\varkappa^2\lambda^2$
„	„	51	„	6	„	unten	„	„	$\sqrt{ab}$	$\varkappa\sqrt{ab}$
„	„	53	„	3	„	oben	„	„	$\varkappa\sqrt{ab}$	$\sqrt{ab}$
„	„	57	„	6	„	oben	„	„	$(a-b\cos^2\frac{\omega}{2}$	
									$(a-b)\cos^2\frac{\omega}{2}$	
„	„	60	„	12	„	oben	„	„	$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$
„	„	65	„	4	„	oben	„	„	$\frac{\partial r}{\partial \zeta}$	$\frac{\partial \rho}{\partial \zeta}$

Lebenslauf.

Am 9. Oktober 1875 wurde ich — Abraham Tachauer, israelitischer Confession — in Würzburg geboren, als Sohn des Seminarlehrers Dr. Gustav Tachauer und dessen Ehefrau Jettchen, geb. Goldschmidt.

In meiner Heimat besuchte ich die Volksschule und das humanistische Gymnasium, welches ich im Jahre 1894 absolvierte. 5 Jahre lang widmete ich mich dem Studium hauptsächlich der Mathematik, Physik und Astronomie, und zwar 3 Jahre in Würzburg und 2 Jahre in München. Während meiner Studienzeit hörte ich die Vorlesungen folgender Herren Professoren und Dozenten: in Würzburg: Lorenz Grasberger, Arthur Hantzsch, Robert Haussner, Theodor Henner, Oswald Külpe, Karl Marbe, Friedrich Prym, Fritz Regel, Wilhelm Röntgen, Eduard Selling, Aurel Voss; in München: Ernst Anding, Gustav Bauer, Karl Doehlemann, Wilhelm Donle, Walter Dyck, Leo Grätz, Arthur Korn, Ferdinand Lindemann, Eugen v. Lommel, Iwan v. Müller, Alfred Pringsheim, Hugo Seeliger, Eduard v. Weber. Diesen Herrn sei an dieser Stelle für ihre gütige Bemühung um meine wissenschaftliche Ausbildung der gebührende Dank ausgesprochen.

Im Jahre 1898 bestand ich den I. Abschnitt, und im Jahre 1899 den II. Abschnitt der Prüfung für Mathematik und Physik in München, beide mit der Note: gut.

Seit dem 1. Januar 1900 bin ich als Assistent für Mathematik und Physik an der Realschule Gunzenhausen thätig.

Der mündlichen Doktorprüfung unterzog ich mich am 18. Juni 1902.